L. Chambadal

Formulaire de mathématiques

Dunod Université

L. CHAMBADAL

Ancien élève de l'École Normale Supérieure
Agrégé de l'Université

formulaire
de mathématiques

DU MÊME AUTEUR

Exercices et problèmes résolus d'algèbre (Dunod).
Exercices et problèmes résolus d'analyse (Dunod).
Mathématiques préparatoires au commerce et à l'économie (Dunod).

1. Algèbre.
2. Analyse.
3. Calcul des probabilités.

Dictionnaire de mathématiques (Hachette).

En collaboration avec Jean-Louis OVAERT

Cours de mathématiques (Gauthier-Villars) :

Algèbre II.
Analyse II

© Bordas, Paris, 1978
ISBN 2-04-010152-7

" Toute représentation ou reproduction, intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur, ou de ses ayants-droit, ou ayants-cause, est illicite (loi du 11 mars 1957, alinéa 1er de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal. La loi du 11 mars 1957 n'autorise, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, que les copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective d'une part, et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration "

TABLE DES MATIÈRES

I. STRUCTURES FONDAMENTALES 1

1. Ensembles 1
2. Groupes 2
3. Anneaux et corps 4
4. Nombres complexes 7

II. POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES 11

1. Polynômes à coefficients dans un anneau commutatif 11
2. Polynômes et fractions rationnelles à une indéterminée à coefficients dans un corps commutatif 13
3. Équations algébriques 18
4. Applications 21

III. ALGÈBRE LINÉAIRE ET MULTILINÉAIRE 27

1. Espaces vectoriels et applications linéaires 27
2. Espaces vectoriels de dimension finie 32
3. Matrices 36
4. Déterminants 43
5. Systèmes d'équations linéaires 51
6. Valeurs propres, vecteurs propres 53

IV. ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS ET HERMITIENS 56

1. Formes quadratiques 56
2. Espaces vectoriels euclidiens 59
3. Espaces vectoriels hermitiens 63

V. GÉOMÉTRIE AFFINE ET GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE 68

1. Espaces affines 68
2. Barycentres. Parties convexes d'un espace affine..... 70
3. Espaces affines de dimension finie..... 71
4. Espace affine euclidien 72
5. Espaces affines euclidiens de dimension finie..... 73
6. Torseurs..... 77

VI. ÉLÉMENTS DE TOPOLOGIE..... 80

1. Propriétés fondamentales de **R**..... 80
2. Espaces métriques 80
3. Espaces vectoriels normés..... 82
4. Applications d'un espace métrique dans un autre..... 83

VII. FONCTIONS NUMÉRIQUES OU VECTORIELLES D'UNE VARIABLE RÉELLE..... 87

1. Fonctions numériques d'une variable réelle..... 87
2. Intégrale d'une fonction numérique d'une variable réelle.... 94
3. Fonctions usuelles et applications..... 100
4. Fonctions vectorielles d'une variable réelle..... 116

VIII. CALCUL DIFFÉRENTIEL..... 117

1. Applications d'un ouvert de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^n$..... 117
2. Applications différentiables 118
3. Cas particulier d'une fonction numérique 120
4. Fonctions implicites..... 122

IX. SÉRIES..... 124

1. Séries numériques à termes réels ou complexes..... 124
2. Suites et séries de fonctions..... 128
3. Séries entières 130

X. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES 137

1. Généralités sur les équations différentielles..... 137
2. Intégration des équations différentielles du premier ordre.... 138
3. Systèmes d'équations différentielles linéaires du premier ordre 140

XI. GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE ET CINÉMATIQUE.. 145

1. Propriétés affines des courbes 145
2. Propriétés métriques des courbes..... 148
3. Cinématique 158
4. Propriétés des surfaces 161

XII. COMPLÉMENTS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL 167

1. Gradient, divergence, rotationnel..... 167
2. Calcul des intégrales doubles et des intégrales triples..... 168
3. Intégrale d'une forme différentielle..... 171
4. Applications géométriques des intégrales multiples..... 178

INDEX TERMINOLOGIQUE..... 182

I. STRUCTURES FONDAMENTALES

1. ENSEMBLES

Applications. Soient E et F deux ensembles et Γ une partie de $E \times F$ telle que, pour tout élément x de E, il existe un élément y de F et un seul tel que le couple (x, y) appartienne à Γ. Le triplet $f = (\Gamma, E, F)$ s'appelle application de E dans F, de graphe Γ.

Images directes et images réciproques. Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F.

Pour tout couple (A_1, A_2) de parties de E,

$$A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$$
$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$$
$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2) \quad \text{avec égalité si } f \text{ est injective}$$
$$f(A_1 - A_2) \supset f(A_1) - f(A_2) \quad \text{avec égalité si } f \text{ est injective .}$$

Pour tout couple (B_1, B_2) de parties de F,

$$B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)\,, \quad f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)\,,$$
$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)\,, \quad f^{-1}(B_1 - B_2) = f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2)\,.$$

Pour toute partie A de E,

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \quad \text{avec égalité si } f \text{ est injective .}$$

Pour toute partie B de F,

$$f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E) \subset B \quad \text{avec égalité si } f \text{ est surjective .}$$

Application compatible avec deux relations binaires. Soient E et F deux ensembles, R une relation binaire dans E et S une relation binaire dans F. On dit qu'une application f de E dans F est compatible avec les relations R et S si, pour tout couple (x, y) d'éléments de E, la relation $R(x, y)$ implique la relation $S(f(x), f(y))$.

Morphismes. Soit E un ensemble. On appelle loi de composition sur E une application de E^2 dans E.

Soient E et F deux ensembles munis de lois de composition, notées $\perp$ et $\top$. On dit qu'une application f de E dans F est un morphisme si, pour tout couple (x, y) d'éléments de E,

$$f(x \perp y) = f(x) \top f(y) .$$

Le composé $g \circ f$ d'un morphisme f de E dans F et d'un morphisme g de F dans G est un morphisme de E dans G.

On dit qu'une application f de E dans F est un isomorphisme si f admet une application réciproque et si f et f^{-1} sont des morphismes. On démontre que tout morphisme bijectif est un isomorphisme.

Lorsque les ensembles E et F sont égaux et munis de la même loi de composition, les morphismes de E dans F s'appellent endomorphismes de E et les isomorphismes de E sur F, automorphismes de E.

Loi quotient. Soient E un ensemble muni d'une loi de composition $\perp$ et R une relation d'équivalence dans E. Pour que, pour tout couple (ξ,η) d'éléments de l'ensemble quotient E/R, pour tout représentant x de ξ et pour tout représentant y de η, la classe de $x \perp y$ ne dépende que de ξ et de η, il faut et il suffit que, pour tout quadruplet (x, y, z, t) d'éléments de E,

$$(R(x, y) \text{ et } R(z, t)) \Rightarrow R(x \perp z, y \perp t) .$$

On dit alors que la loi de composition sur E est compatible avec la relation d'équivalence R.

L'application qui à tout couple (ξ, η) d'éléments de E/R associe la classe de $x \perp y$ est une loi de composition sur E/R, appelée loi quotient de la loi $\perp$ et notée $\dot{\perp}$.

2. GROUPES

Groupe. On appelle groupe un ensemble G muni d'une loi de composition associative telle qu'il existe un élément neutre et que tout élément de G soit symétrisable. On appelle ordre d'un groupe fini le cardinal de ce groupe.

Morphisme de groupes. Soient G et H deux groupes, dont les lois de composition sont notées multiplicativement. On dit qu'une application f de G dans H est un morphisme de groupes si, pour tout couple (x, y) d'éléments de G,

$$f(xy) = f(x) f(y) .$$

L'image par f de l'élément neutre de G est l'élément neutre de H. L'image par f du symétrique d'un élément x de G est le symétrique de l'élément $f(x)$.

Sous-groupe. On dit qu'une partie G' d'un groupe G est un sous-groupe de G si elle est stable et si, munie de la loi induite par celle de G, G' est un groupe.

Pour qu'une partie G' d'un groupe G soit un sous-groupe de G, il faut et il suffit que

— la partie G' soit stable ;
— l'élément neutre de G appartienne à G' ;
— le symétrique dans G de tout élément de G' appartienne à G'.

Pour qu'une partie non vide G' de G soit un sous-groupe de G, il faut et il suffit que

$$\forall x \in G', \forall y \in G', \qquad xy^{-1} \in G' .$$

(En notation additive, cette condition devient $x - y \in G'$.)

On dit qu'un sous-groupe G' de G est distingué si, pour tout élément x de G et pour tout élément y de G', l'élément xyx^{-1} appartient à G'.

Image et noyau d'un morphisme de groupes. Soient G et H deux groupes et f un morphisme de G dans H.

L'image de G par f est un sous-groupe de H, appelé image de f et noté Im (f).

L'image réciproque de l'élément neutre de H est un sous-groupe distingué de G, appelé noyau de f et noté Ker (f).

Groupe quotient. Soit G un groupe.

Soient R une relation d'équivalence dans G et G' la classe de l'élément neutre de G. Si R est compatible avec la loi de G, alors G' est un sous-groupe distingué de G. La classe de tout élément x de G est l'ensemble, noté xG', des éléments de la forme xy, où $y \in G'$. De plus, la relation $R(x, y)$ équivaut à la relation $x^{-1} y \in G'$.

Réciproquement, soit G' un sous-groupe distingué de G. La relation binaire définie par les couples (x, y) d'éléments de G tels que $x^{-1} y \in G'$ est une relation d'équivalence dans G compatible avec la loi de G. Muni de la loi quotient, l'ensemble quotient est un groupe, appelé groupe quotient de G par G' et noté G/G'.

Groupes monogènes, groupes cycliques. L'intersection d'un ensemble de sous-groupes d'un groupe G est encore un sous-groupe de G. Il s'ensuit que, pour toute partie P de G, l'ensemble des sous-groupes de G contenant P possède un plus petit élément (au sens de la relation d'inclusion), à savoir

l'intersection de tous les sous-groupes de G contenant P ; on appelle ce plus petit élément le sous-groupe engendré par P et on le note $[P]$.

On dit qu'un groupe G est monogène s'il existe un élément a de G tel que le sous-groupe de G engendré par $\{ a \}$ soit égal à G ; on dit alors que a est un générateur de G. Les groupes monogènes finis sont appelés groupes cycliques.

Soient G un groupe et a un élément de G. L'application $f : m \mapsto a^m$ est un morphisme du groupe additif $\mathbf{Z}$ dans G, dont l'image est le sous-groupe G' engendré par $\{ a \}$. Si f est injectif, on dit que a est d'ordre infini. Dans le cas contraire, G' est fini ; le cardinal n de G' s'appelle ordre de a. C'est le plus petit des entiers naturels non nuls m tels que $a^m = e$, où e est l'élément neutre de G. Le sous-groupe G' est constitué des n éléments $e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$.

En particulier, un groupe monogène est commutatif. Un groupe monogène infini est isomorphe au groupe additif $\mathbf{Z}$; un groupe cyclique d'ordre n est isomorphe au groupe additif $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Permutations. Soit E un ensemble fini à n éléments. On appelle permutation de E toute bijection de E sur lui-même. L'ensemble des permutations de E, muni de la loi de composition des applications, est un groupe fini d'ordre n !, appelé groupe symétrique de E et noté $\mathfrak{S}_E$.

On dit qu'une permutation σ de E est une transposition si l'ensemble des éléments de E non fixes par σ a deux éléments. Lorsque E a au moins deux éléments, le groupe symétrique de E est engendré par les transpositions. Il existe un morphisme et un seul du groupe $\mathfrak{S}_E$ dans le groupe $\{ -1, 1 \}$ prenant la valeur -1 sur toute transposition ; ce morphisme est appelé signature et noté ε.

Lorsque l'ensemble E est totalement ordonné, la signature $\varepsilon(\sigma)$ d'une permutation σ est égale à $(-1)^v$, où v est le nombre de couples (p, q) d'éléments de E tels que $p < q$ et $\sigma(p) > \sigma(q)$.

Le noyau du morphisme ε est un sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}_E$, appelé groupe alterné de E et noté $\mathfrak{A}_E$; son ordre est $n !/2$.

Lorsque E est l'intervalle $[1, n]$ de $\mathbf{N}$, le groupe symétrique et le groupe alterné de E se notent respectivement $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{A}_n$.

3. ANNEAUX ET CORPS

Anneau. On appelle anneau un ensemble A muni de deux lois de composition :

— la première, notée additivement, fait de A un groupe commutatif ;

— la seconde, notée multiplicativement, est associative et distributive par rapport à la première ;

— la seconde loi admet un élément neutre ; celui-ci est appelé élément unité de A, et souvent noté 1.

On dit que l'anneau A est commutatif si la deuxième loi est commutative.

Formule du binôme. Soient A un anneau et n un entier naturel non nul. Pour tout couple (a, b) d'éléments permutables de A,

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \, a^{n-p} \, b^p .$$

Pour toute suite $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ d'éléments de A permutables deux à deux,

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_r)^n = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_r=n} \frac{n\,!}{n_1\,!\, n_2\,! \ldots n_r\,!} (a_1)^{n_1} (a_2)^{n_2} \ldots (a_r)^{n_r} .$$

En particulier,

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2\,bc+2\,ca+2\,ab$$
$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(b^2\,c+bc^2+c^2\,a+ca^2+a^2\,b+ab^2)+6\,abc .$$

Morphisme d'anneaux. Soient A et B des anneaux. On dit qu'une application f de A dans B est un morphisme d'anneaux si, pour tout couple (x, y) d'éléments de A,

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

et si l'image de l'élément unité de A par f est l'élément unité de B.

Sous-anneau. On dit qu'une partie A' d'un anneau A est un sous-anneau de A si elle est stable, si, munie des lois induites, A' est un anneau et si l'élément unité de A' n'est autre que celui de A.

Pour qu'une partie A' de A soit un sous-anneau de A, il faut et il suffit que l'élément unité de A appartienne à A' et que

$$\forall x \in A', \forall y \in A', \qquad x - y \in A' \quad \text{et} \quad xy \in A' .$$

On appelle idéal à gauche (resp. à droite) d'un anneau A tout sous-groupe additif $\mathfrak{I}$ de A tel que, pour tout élément x de A et pour tout élé-

ment y de $\mathfrak{I}$, l'élément xy (resp. yx) appartienne à $\mathfrak{I}$. On appelle idéal bilatère une partie de A qui est à la fois un idéal à gauche et un idéal à droite. (Dans le cas où l'anneau A est commutatif, ces trois notions coïncident.)

Image et noyau d'un morphisme d'anneaux. Soient A et B deux anneaux et f un morphisme de A dans B.

L'image de A par f est un sous-anneau de B, appelé image de f et noté Im (f).

L'image réciproque de l'élément nul de B est un idéal bilatère de A, appelé noyau de f et noté Ker (f).

Anneau quotient. Soit A un anneau.

Soient R une relation d'équivalence dans A et $\mathfrak{I}$ la classe de 0. Si R est compatible avec les lois de A, alors $\mathfrak{I}$ est un idéal bilatère de A. La classe de tout élément x de A est l'ensemble, noté $x + \mathfrak{I}$, des éléments de la forme $x + y$, où $y \in \mathfrak{I}$. De plus, la relation $R(x, y)$ équivaut à la relation $x - y \in \mathfrak{I}$.

Réciproquement, soit $\mathfrak{I}$ un idéal bilatère de A. La relation binaire définie par les couples (x, y) d'éléments de A tels que $x - y \in \mathfrak{I}$ est une relation d'équivalence dans A compatible avec les lois de A. Muni des lois quotients, l'ensemble quotient est un anneau, appelé anneau quotient de A par $\mathfrak{I}$ et noté $A/\mathfrak{I}$.

Intersection de sous-anneaux, d'idéaux. L'intersection d'un ensemble de sous-anneaux (resp. d'idéaux à gauche, etc.) de A est encore un sous-anneau (resp. un idéal à gauche, etc.) de A. On définit comme dans le cas des groupes le sous-anneau, l'idéal à gauche, etc., engendrés par une partie de A.

On dit qu'un idéal $\mathfrak{I}$ d'un anneau commutatif A est principal s'il existe un élément a de $\mathfrak{I}$ engendrant $\mathfrak{I}$ (i.e. si $\mathfrak{I}$ est l'ensemble des éléments de la forme xa, où $x \in A$).

Diviseurs de zéro, anneau intègre. On dit qu'un élément a d'un anneau A est un diviseur de zéro à gauche (resp. à droite) s'il existe un élément non nul b de A tel que $ab = 0$ (resp. $ba = 0$).

On dit qu'un anneau est intègre s'il est commutatif, non réduit à $\{0\}$ et si 0 est le seul diviseur de 0.

On dit qu'un anneau A est principal s'il est intègre, et si tout idéal de A est principal.

L'anneau $\mathbf{Z}$ est principal.

Caractéristique d'un anneau. Soit A un anneau intègre. L'application $f : m \mapsto me$ de $\mathbf{Z}$ dans A, où e est l'élément unité de A, est un morphisme d'anneaux. Le noyau de f est un idéal de $\mathbf{Z}$, dont le générateur est appelé caractéristique de A.

Si n est premier, la caractéristique de l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est n.

Corps. On dit qu'un anneau K est un corps s'il n'est pas réduit à $\{ 0 \}$, et si tout élément non nul de K est inversible.

Autrement dit, un corps K est un anneau tel que l'ensemble $K^* = K - \{ 0 \}$ soit un groupe pour la multiplication.

Soient K un corps, dont l'élément unité est noté 1, et x un élément de K. On considère l'élément $S_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$; alors :

— si $x \neq 1$, $S_n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$;

— si $x = 1$, $S_n = n + 1$.

Sous-corps. On dit qu'une partie K' d'un corps K est un sous-corps de K si elle est stable et si, munie des lois induites par celles de K, K' est un corps.

Pour qu'une partie K' d'un corps K soit un sous-corps de K, il faut et il suffit que K' soit un sous-anneau de K et que l'inverse de tout élément non nul de K' appartienne à K'.

La caractéristique d'un corps est soit nulle, soit un nombre premier.

Soit n un entier naturel non nul. Pour que l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ soit un corps, il faut et il suffit que n soit premier.

4. NOMBRES COMPLEXES

L'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$, muni de la loi de composition

$$(a, b).(a', b') = (aa' - bb', ab' + ba'),$$

est une algèbre de dimension 2 sur $\mathbf{R}$, associative et commutative, ayant pour élément unité $(1, 0)$; cette algèbre est un corps, appelé corps des nombres complexes et noté $\mathbf{C}$. L'application $j : a \mapsto (a, 0)$ est un morphisme injectif de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, permettant d'identifier le corps $\mathbf{R}$ à un sous-corps de $\mathbf{C}$. L'élément $(0, 1)$ se note i.

Tout nombre complexe z peut s'écrire d'une manière et d'une seule sous la forme $z = a + b\,\mathrm{i}$, où a et b appartiennent à $\mathbf{R}$. Cette écriture s'appelle forme cartésienne du nombre complexe z. Le nombre a s'appelle partie

réelle du nombre complexe z, et se note $\mathrm{Re}\,(z)$; le nombre b s'appelle partie imaginaire de z, et se note $\mathrm{Im}\,(z)$.

Si z et z' sont deux nombres complexes écrits sous forme cartésienne $z = a + b\,\mathrm{i}$ et $z' = a' + b'\,\mathrm{i}$, alors

$$z + z' = (a + b\,\mathrm{i}) + (a' + b'\,\mathrm{i}) = (a + a') + (b + b')\,\mathrm{i}$$
$$zz' = (a + b\,\mathrm{i})\,(a' + b'\,\mathrm{i}) = (aa' - bb') + (ab' + ba')\,\mathrm{i}\,.$$

$$\mathrm{Re}\,(z + z') = \mathrm{Re}\,(z) + \mathrm{Re}\,(z')$$
$$\mathrm{Im}\,(z + z') = \mathrm{Im}\,(z) + \mathrm{Im}\,(z')$$
$$\mathrm{Re}\,(zz') = \mathrm{Re}\,(z).\mathrm{Re}\,(z') - \mathrm{Im}\,(z).\mathrm{Im}\,(z')$$
$$\mathrm{Im}\,(zz') = \mathrm{Re}\,(z).\mathrm{Im}\,(z') + \mathrm{Im}\,(z).\mathrm{Re}\,(z')\,.$$

En particulier, $\mathrm{Re}\,(\mathrm{i}z) = -\mathrm{Im}\,(z)$, $\mathrm{Im}\,(\mathrm{i}z) = \mathrm{Re}\,(z)$.

Nombres complexes conjugués. Les seuls endomorphismes du corps **C** des nombres complexes qui laissent fixe **R** sont l'application identique de **C**, et l'application φ qui à tout nombre complexe $z = a + b\,\mathrm{i}$, où a et b appartiennent à **R**, associe le nombre complexe $\varphi(z) = a - b\,\mathrm{i}$.

De plus, φ est une involution, appelée involution canonique de **C** ; le transformé par φ d'un nombre complexe z s'appelle nombre complexe conjugué de z, et se note $\bar{z}$. L'application φ étant involutive, on dit encore que les nombres complexes z et $\bar{z}$ sont conjugués.

$$z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,(z)\,, \qquad z - \bar{z} = 2\,\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,(z)\,.$$

En particulier, pour que $\bar{z} = z$, il faut et il suffit que z soit réel ; pour que $\bar{z} = -z$, il faut et il suffit que z soit imaginaire pur.

$$z.\bar{z} = [\mathrm{Re}\,(z)]^2 + [\mathrm{Im}\,(z)]^2\,.$$

Module d'un nombre complexe. On appelle module d'un nombre complexe z, et on note $|\,z\,|$, la racine carrée du nombre réel positif $z.\bar{z}$.

Pour tout nombre complexe z,

$$|\,\mathrm{Re}\,(z)\,| \leqslant |\,z\,|\,,$$

avec égalité si et seulement si z est réel ; de même

$$|\,\mathrm{Im}\,(z)\,| \leqslant |\,z\,|\,,$$

avec égalité si et seulement si z est imaginaire pur.

Pour qu'un nombre complexe soit nul, il faut et il suffit que son module le soit.

Le module du produit de deux nombres complexes est égal au produit de leurs modules :

$$| zz' | = | z | . | z' | .$$

Il en résulte que si z' est non nul,

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{| z |}{| z' |} .$$

Pour tout couple (z, z') de nombres complexes,

$$| z + z' | \leqslant | z | + | z' |$$

(inégalité triangulaire). Lorsque z est non nul, il y a égalité si et seulement s'il existe un nombre réel positif a tel que $z' = az$.

Pour qu'un nombre complexe z soit inversible, il faut et il suffit que $| z |$ soit non nul ; dans ces conditions,

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{| z |^2} .$$

Groupe des nombres complexes de module 1. Soit z un nombre complexe ; pour que $| z | = 1$, il faut et il suffit que z soit inversible et que $z^{-1} = \overline{z}$.

L'application de $\mathbf{C}^*$ dans $\mathbf{R}_+^*$ qui à z associe $| z |$ est un morphisme de groupes multiplicatifs, qui est surjectif. Son noyau est l'ensemble, noté $\mathbf{U}$, des nombres complexes de module 1 ; cet ensemble est donc un sous-groupe de $\mathbf{C}^*$.

Puissances n-ièmes et racines n-ièmes d'un nombre complexe

Formule de Moivre. Soient r un nombre réel strictement positif, θ un nombre réel et n un entier rationnel. Alors

$$[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) .$$

Racines n-ièmes de l'unité. Soit n un entier naturel non nul. L'équation $z^n = 1$ admet n solutions, dites racines n-ièmes de l'unité, à savoir les nombres complexes

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} ,$$

où k est un entier appartenant à l'intervalle $[0, n - 1]$.

Ces nombres constituent un sous-groupe cyclique du groupe multiplicatif **U**. Plus précisément, pour tout élément k de $[0, n-1]$,

$$z_k = (z_1)^k .$$

Enfin, si k est différent de 0, l'inverse de z_k est donné par la relation

$$(z_k)^{-1} = \bar{z}_k = z_{n-k} .$$

Soit p un entier rationnel. La somme

$$S_p = \sum_{k=0}^{n-1} (z_k)^p$$

est égale à 0 si p n'est pas multiple de n, et à n dans le cas contraire.

Racines n-ièmes d'un nombre complexe. Soient n un entier naturel non nul, et c un nombre complexe. On considère l'équation

(1) $\quad z^n = c .$

Si $c = 0$, l'équation (1) admet une solution, à savoir 0.

Si $c \neq 0$, l'équation (1) admet n solutions. Si c est écrit sous la forme trigonométrique

$$c = r(\cos a + \mathrm{i} \sin a) ,$$

les racines n-ièmes de c sont données par la formule

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{a + 2k\pi}{n} + \mathrm{i} \sin \frac{a + 2k\pi}{n} \right) ,$$

où k est un entier appartenant à l'intervalle $[0, n-1]$.

On obtient encore ces solutions en multipliant successivement l'une d'entre elles par les racines n-ièmes de l'unité.

II. POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

1. POLYNÔMES A COEFFICIENTS DANS UN ANNEAU COMMUTATIF

a) Anneau des polynômes à une indéterminée

Soient A un anneau commutatif et $A^{(\mathbf{N})}$ l'ensemble des suites d'éléments de A à support fini. Muni des deux lois de composition

$$(\alpha_n) + (\beta_n) = (\alpha_n + \beta_n), \qquad (\alpha_n)(\beta_n) = \left(\sum_{p+q=n} \alpha_p \beta_q \right),$$

$A^{(\mathbf{N})}$ est un anneau commutatif.

L'élément neutre est la suite (1, 0, 0, ...), notée 1. L'élément (0, 1, 0, ...) est noté X. Tout élément $P = (\alpha_n)$ de $A^{(\mathbf{N})}$ s'écrit sous la forme $P = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n X^n$, où les éléments α_n sont nuls à partir d'un certain rang.

L'anneau $A^{(\mathbf{N})}$ s'appelle anneau des polynômes à une indéterminée à coefficients dans A, et se note $A[X]$.

Degré et valuation. Soit $P = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n X^n$ un élément de $A[X]$.

Si $P \neq 0$, on appelle degré (resp. valuation) de P le plus grand (resp. le plus petit) des entiers naturels n tels que $\alpha_n \neq 0$.

Si $P = 0$, on appelle degré (resp. valuation) de P l'élément $-\infty$ (resp. $+\infty$).

Le degré et la valuation de P se notent respectivement $d^o(P)$ et $v_0(P)$.

Pour tout couple (P, Q) de polynômes,

$$d^o(P+Q) \leqslant \sup(d^o(P), d^o(Q)), \qquad v_0(P+Q) \geqslant \inf(v_0(P), v_0(Q)),$$

avec égalité si $d^o(P) \neq d^o(Q)$ avec égalité si $v_0(P) \neq v_0(Q)$;

$$d^o(PQ) \leqslant d^o(P) + d^o(Q), \qquad v_0(PQ) \geqslant v_0(P) + v_0(Q),$$

avec égalité si l'anneau A est intègre.

En particulier, si A est intègre, il en est de même de $A[X]$.

Toute famille de polynômes de degrés distincts deux à deux, ou de valuations distinctes deux à deux, est libre. Toute suite $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ de polynômes telle que, pour tout élément k de $[0. n]$, $d^o(P_k) = k$, est une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur à n. Toute suite $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de polynômes telle que, pour tout entier naturel n, $d^o(P_n) = n$, est une base de $K[X]$.

Fonction polynomiale. Pour tout polynôme $P = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n X^n$, on note $\tilde{P}$ l'application $\xi \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \xi^n$ de A dans lui-même.

Soit B une partie de A. On dit qu'une application f de B dans A est polynomiale s'il existe un élément P de $A[X]$ tel que, pour tout élément ξ de B, $\tilde{P}(\xi) = f(\xi)$. Pour tout polynôme P, la fonction $\tilde{P}$ s'appelle fonction polynomiale associée à P.

Composition des polynômes. Soient $P = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n X^n$ et Q deux éléments de $A[X]$. On appelle composé de P et Q, et on note $P \circ Q$, ou encore $P(Q)$, le polynôme $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n Q^n$. La fonction polynomiale associée à $P \circ Q$ est la composée des fonctions polynomiales associées à P et à Q :

$$\widetilde{P \circ Q} = \tilde{P} \circ \tilde{Q} .$$

Pour tout triplet (P, Q, R) de polynômes, $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$.

***b)* Anneau des polynômes à plusieurs indéterminées**

Soient p un entier naturel non nul et $A^{(\mathbf{N}^p)}$ l'ensemble des familles d'éléments de A indexées par $\mathbf{N}^p$ à support fini. Muni des deux lois de composition

$$(\alpha_s) + (\beta_s) = (\alpha_s + \beta_s) , \qquad (\alpha_s)(\beta_s) = \left(\sum_{t+u=s} \alpha_t \beta_u \right) ,$$

$A^{(\mathbf{N}^p)}$ est un anneau commutatif

Pour tout élément i de $[1, p]$, l'élément (α_s) défini par $s(j) = \delta_{ij}$ se note X_i. Tout élément $P = (\alpha_s)$ de $A^{(\mathbf{N}^p)}$ s'écrit sous la forme

$$P = \sum_{s \in \mathbf{N}^p} \alpha_s X_1^{s(1)} X_2^{s(2)} \ldots X_p^{s(p)} .$$

L'anneau $A^{(\mathbf{N}^p)}$ s'appelle anneau des polynômes à p indéterminées à coefficients dans A, et se note $A[X_1, X_2, \ldots, X_p]$.

2. POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES A UNE INDÉTERMINÉE A COEFFICIENTS DANS UN CORPS COMMUTATIF

a) Algèbre des polynômes à une indéterminée

Soit K un corps commutatif. Muni de la loi

$$\left(\lambda, \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n X^n\right) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda\alpha_n X^n ,$$

l'anneau $K[X]$ est une algèbre associative commutative unitaire. La famille $(1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots)$ est une base de cette algèbre, dite canonique.

Division suivant les puissances croissantes. Soient p un entier naturel, A et B deux éléments de $K[X]$, B étant de valuation nulle. Il existe un couple (Q, R) et un seul d'éléments de $K[X]$ tel que

$$A = BQ + X^{p+1} R \quad \text{et} \quad \mathrm{d}^\circ(Q) \leqslant p .$$

Les polynômes Q et R s'appellent respectivement quotient et reste à l'ordre p de la division de A par B suivant les puissances croissantes.

Division euclidienne. Soient A et B deux éléments de $K[X]$, B étant non nul. Il existe un couple (Q, R) et un seul d'éléments de $K[X]$ tel que

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \mathrm{d}^\circ(R) < \mathrm{d}^\circ(B) .$$

Les polynômes Q et R s'appellent respectivement quotient et reste de la division euclidienne de A par B.

Structure des idéaux de $K[X]$. Soit $\mathfrak{I}$ un idéal non réduit à $\{0\}$ de l'anneau $K[X]$. Il existe un polynôme unitaire D et un seul tel que $\mathfrak{I}$ soit l'ensemble des multiples de D. Le polynôme D s'appelle le générateur de l'idéal $\mathfrak{I}$.

Divisibilité dans $K[X]$. **P.G.C.D.** Soit $(A_1, A_2, \ldots, A_p)$ une suite de p polynômes non tous nuls. L'ensemble des polynômes unitaires diviseurs communs à ces polynômes possède un plus grand élément (au sens de la relation de divisibilité), à savoir le générateur de l'idéal de $K[X]$ engendré par ces polynômes.

Lorsque le P.G.C.D. des polynômes $A_1, A_2, \ldots, A_p$ est égal à 1, on dit que ces polynômes sont premiers entre eux dans leur ensemble. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'il existe une suite $(U_1, U_2, \ldots, U_p)$

de polynômes telle que

$$\sum_{i=1}^{p} U_i A_i = 1 \qquad \text{(égalité de Bézout)}.$$

Soient A, B et C trois polynômes non nuls ; si A divise BC et si A et B sont premiers entre eux, A divise C (propriété de Gauss).

Soient A, B et C trois polynômes non nuls. Si A est premier avec B et C, alors A est premier avec BC.

Egalité de Bézout pour deux polynômes. Soient A et B deux polynômes non nuls premiers entre eux. Pour tout polynôme P, il existe un couple (U, V) et un seul de polynômes tel que

$$P = AU + BV, \qquad d^o(V) < d^o(A).$$

De plus, si $d^o(P) < d^o(A) + d^o(B)$, alors $d^o(U) < d^o(B)$.

En particulier, si A et B ne sont pas constants, il existe un couple (U, V) de polynômes et un seul tel que

$$1 = AU + BV, \quad d^o(V) < d^o(A), \quad d^o(U) < d^o(B).$$

P.P.C.M. Soit $(A_1, A_2, ..., A_p)$ une suite de p polynômes non nuls. L'ensemble des polynômes unitaires multiples communs à ces polynômes possède un plus petit élément M, à savoir le générateur de l'idéal intersection des idéaux de $K[X]$ engendrés par chacun de ces polynômes.

Soient A et B deux polynômes non nuls, α et β leurs coefficients dominants, D leur P.G.C.D. et M leur P.P.C.M. :

$$AB = \alpha\beta DM.$$

Soient $A_1, A_2, ..., A_p$ des polynômes non nuls, D leur P.G.C.D. et M leur P.P.C.M. Pour tout polynôme unitaire B,

$$\text{P.G.C.D.}\ (BA_1, BA_2, ..., BA_p) = BD,$$
$$\text{P.P.C.M.}\ (BA_1, BA_2, ..., BA_p) = BM.$$

Les polynômes A_1/D, A_2/D, ..., A_p/D sont premiers entre eux dans leur ensemble.

Polynômes irréductibles. On dit qu'un polynôme P est irréductible s'il est non constant et si, pour tout couple (Q, R) de polynômes tel que $P = QR$, l'un des polynômes Q et R est constant.

Soit P un polynôme unitaire irréductible. Pour tout polynôme non

nul A, il existe un couple (n, B) et un seul, où n est un entier naturel et B un polynôme non nul premier avec P, tel que $A = P^n B$. L'entier n s'appelle valuation de A relative à P et se note $v_P(A)$. On pose $v_P(0) = +\infty$.

Tout polynôme non nul A s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme

$$A = \alpha \prod_{P \in E} P^{m_P},$$

où α est un scalaire, E l'ensemble des polynômes unitaires irréductibles et $(m_P)_{P \in E}$ une famille d'entiers naturels à support fini. Le scalaire α est le coefficient dominant de A et, pour tout élément P de E, $m_P = v_P(A)$.

Pour tout couple (A, B) de polynômes et pour tout polynôme unitaire irréductible P,

$$v_P(AB) = v_P(A) + v_P(B) ;$$
$$v_P(A + B) \geqslant \inf [v_P(A), v_P(B)],$$

avec égalité si $v_P(A) \neq v_P(B)$.

Pour qu'un polynôme non nul A divise un polynôme non nul B, il faut et il suffit que, pour tout élément P de E,

$$v_P(A) \leqslant v_P(B) .$$

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_p$ des polynômes non nuls, D leur P.G.C.D. et M leur P.P.C.M. Alors

$$D = \prod_{P \in E} P^{n(P)} \quad \text{où} \quad n(P) = \inf_{i \in [1,p]} v_P(A_i)$$
$$M = \prod_{P \in E} P^{n'(P)} \quad \text{où} \quad n'(P) = \sup_{i \in [1,p]} v_P(A_i) .$$

Dérivation des polynômes. Il existe un endomorphisme D de l'espace vectoriel $K[X]$ et un seul tel que

$$D(X) = 1$$

et que, pour tout couple (P, Q) de polynômes,

$$D(PQ) = D(P)\, Q + P D(Q) .$$

Pour tout polynôme $P = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n X^n$,

$$D(P) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n X^{n-1} .$$

Le polynôme $D(P)$ est encore le coefficient de Y dans le développement de $P(X + Y)$, considéré comme élément de $K[X]\,[Y]$.

Le polynôme $D(P)$ s'appelle polynôme dérivé du polynôme P ; on dit encore que $D(P)$ est la dérivée de P. L'endomorphisme D s'appelle dérivation canonique de l'algèbre $K[X]$. Plus généralement, pour tout entier naturel non nul n, le polynôme $D^n(P)$ s'appelle dérivée n-ième du polynôme P, et se note aussi $P^{(n)}$. Lorsque $n = 1$, $D(P)$ s'appelle encore dérivée première de P, et se note P' ; lorsque $n = 2$, $D^2(P)$ s'appelle dérivée seconde de P, et se note P'', etc.

Pour tout élément P de $K[X]$ et pour tout entier naturel non nul m,

$$D(P^m) = mP^{m-1}\,D(P)\,.$$

Pour toute suite $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ d'éléments de $K[X]$,

$$D(P_1\,P_2 \ldots P_n) = \sum_{i=1}^{n} P_1\,P_2 \ldots P_{i-1}\,D(P_i)\,P_{i+1} \ldots P_n\,.$$

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $K[X]$ et pour tout entier naturel non nul n,

$$D^n(PQ) = C_n^0\,D^n(P)\,Q + C_n^1\,D^{n-1}(P)\,D(Q) + \cdots + C_n^p\,D^{n-p}(P)\,D^p(Q) + \cdots + C_n^n\,PD^n(Q)$$

(formule de Leibniz).

Soient m et n deux entiers naturels non nuls et α un scalaire.

Si $n \geqslant m$,

$$D^m(X - \alpha)^n = \frac{n\,!}{(n-m)\,!}(X - \alpha)^{n-m}\,.$$

Si $n < m$,

$$D^m(X - \alpha)^n = 0\,.$$

Pour tout couple (P, Q) de polynômes,

$$D(P \circ Q) = [D(P) \circ Q].D(Q)\,.$$

Formule de Taylor. Soit K un corps commutatif de caractéristique nulle. Pour tout élément P de $K[X]$ et pour tout scalaire α,

$$P = \sum_{n=0}^{+\infty} [D^n(P)](\alpha) \frac{(X-\alpha)^n}{n!} \qquad \text{(formule de Taylor).}$$

En particulier,

$$P = \sum_{n=0}^{+\infty} [D^n(P)](0) \frac{X^n}{n!} \qquad \text{(formule de Maclaurin).}$$

b) **Corps des fractions rationnelles à une indéterminée**

Il existe un corps commutatif, défini à un isomorphisme près, appelé corps des fractions rationnelles à une indéterminée à coefficients dans K et noté $K(X)$, possédant les propriétés suivantes :

a) L'anneau $K[X]$ est un sous-anneau du corps $K(X)$.

b) Le corps $K(X)$ est engendré par l'anneau $K[X]$, c'est-à-dire que tout élément R de $K(X)$ peut s'écrire sous la forme $R = PQ^{-1}$, où P et Q sont des polynômes, Q étant non nul.

L'application de $K \times K(X)$ dans $K(X)$ qui associe au couple (α, R) la fraction rationnelle αR (α étant considéré comme un polynôme) permet de munir $K(X)$ d'une structure d'algèbre sur le corps K.

Degré d'une fraction rationnelle. Il existe une application et une seule, appelée degré et notée d°, de $K(X)$ dans $\mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$, prolongeant l'application $P \mapsto \mathrm{d}^\circ(P)$ de $K[X]$ dans $\mathbf{N} \cup \{-\infty\}$, et possédant la propriété suivante :

Pour tout couple (R, R') d'éléments de $K(X)$,

$$\mathrm{d}^\circ(RR') = \mathrm{d}^\circ(R) + \mathrm{d}^\circ(R').$$

Si une fraction rationnelle R est écrite sous la forme $R = P/Q$, où $P \in K[X]$ et où $Q \in K[X]^*$,

$$\mathrm{d}^\circ(R) = \mathrm{d}^\circ(P) - \mathrm{d}^\circ(Q).$$

Pour tout couple (R, R') de fractions rationnelles,

$$\mathrm{d}^\circ(R + R') \leqslant \sup[\mathrm{d}^\circ(R), \mathrm{d}^\circ(R')],$$

avec égalité si $\mathrm{d}^\circ(R) \neq \mathrm{d}^\circ(R')$.

Fonction rationnelle. Soit R une fraction rationnelle. On dit qu'un scalaire ξ est substituable dans R s'il existe un élément (P, Q) de $K[X] \times K[X]^*$ tel que $R = P/Q$ et que $\tilde{Q}(\xi) \neq 0$. L'élément $\tilde{P}(\xi)/\tilde{Q}(\xi)$ ne dépend que de R et de ξ ; on l'appelle valeur de R au point ξ.

On note $\tilde{R}$ l'application qui à tout élément ξ de K substituable dans R associe la valeur de R au point ξ.

Soit B une partie de K. On dit qu'une application f de B dans K est rationnelle s'il existe un élément R de $K(X)$ tel que, pour tout élément ξ de B, ξ soit substituable dans R et $\tilde{R}(\xi) = f(\xi)$. Pour toute fraction rationnelle R, l'application $\tilde{R}$ s'appelle fonction rationnelle associée à R.

3. ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

Racines d'un polynôme. Soit P un élément de $K[X]$. On dit qu'un élément α de K est une racine de P si $\tilde{P}(\alpha) = 0$.

Soit K' un corps commutatif contenant K comme sous-corps. Tout élément de $K[X]$ est un élément de $K'[X]$; l'algèbre $K[X]$ est une sous-algèbre unitaire de la K-algèbre unitaire $K'[X]$.

Soit P un polynôme à coefficients dans K. On dit qu'un élément de K' est une racine de P dans K' si c'est une racine de P, considéré comme polynôme à coefficients dans K'.

Ordre de multiplicité d'une racine. Pour tout élément α de K, le polynôme $X - \alpha$ est unitaire irréductible. La valuation relative à $X - \alpha$ s'appelle encore valuation au point α, et se note v_α.

Soient P un polynôme non nul et α une racine de P. L'entier naturel non nul $v_\alpha(P)$ s'appelle encore ordre de multiplicité (ou, plus simplement, multiplicité) de la racine α.

Une racine α de P d'ordre 1 est dite simple. Une racine α de P d'ordre strictement supérieur à 1 est dite multiple. Enfin, une racine α de P d'ordre 2 (resp. 3, 4, etc.) est dite double (resp. triple, quadruple, etc.).

L'ensemble des racines de P est fini, et la somme de leurs multiplicités est inférieure au degré de P.

Polynôme scindé. On dit qu'un polynôme P à coefficients dans K est scindé s'il est nul ou si la somme des multiplicités des racines de P est égale au degré de P.

Si P n'est pas constant, cela revient à dire qu'en désignant par $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_r$ les racines de P dans K, par $n_1, n_2, \ldots, n_r$ leurs ordres de multiplicité, et par λ le coefficient dominant de P,

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X - \zeta_i)^{n_i}.$$

Si P est un polynôme scindé sur K, alors, pour tout corps K' contenant K comme sous-corps, les seules racines de P dans K' sont les racines de P

dans K. Réciproquement, pour tout élément P de $K[X]$, il existe un corps K' contenant K comme sous-corps, tel que P soit scindé sur K'. C'est pourquoi, par abus de langage, un polynôme scindé sur K est dit aussi avoir toutes ses racines dans K.

Relations entre coefficients et racines. Soit

$$P = \alpha_p X^p + \alpha_{p-1} X^{p-1} + \cdots + \alpha_0 \qquad \alpha_p \neq 0$$

un polynôme scindé, factorisé sous la forme

$$P = \alpha_p \prod_{i=1}^{p} (X - \xi_i) .$$

Pour tout élément n de $[1, p]$,

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_n \leqslant p} \xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_n} = (-1)^n \frac{\alpha_{p-n}}{\alpha_p} .$$

En particulier,

$$\sum_{i=1}^{p} \xi_i = -\frac{\alpha_{p-1}}{\alpha_p}, \quad \sum_{i<j} \xi_i \xi_j = \frac{\alpha_{p-2}}{\alpha_p}, \quad \prod_{i=1}^{p} \xi_i = (-1)^p \frac{\alpha_0}{\alpha_p} .$$

Correspondance entre polynômes et fonctions polynomiales

— Si le corps K est infini, le morphisme de l'algèbre unitaire $K[X]$ dans l'algèbre unitaire $\mathscr{F}(K)$ qui associe au polynôme P la fonction polynomiale $\tilde{P}$ est injectif.

— Si le corps K est fini, et si l'on désigne par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ ses éléments, alors le noyau du morphisme précédent est l'idéal de $K[X]$ engendré par le polynôme $\prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i)$.

Critère de multiplicité d'une racine d'un polynôme. On suppose que la caractéristique du corps K est nulle. Soient P un élément de $K[X]$, α un élément de K et m un entier naturel non nul. Pour que α soit racine d'ordre m de P, il faut et il suffit que

$$P(\alpha) = 0 , \quad [D(P)](\alpha) = 0, \ldots , \quad [D^{m-1}(P)](\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad [D^m(P)](\alpha) \neq 0 .$$

Polynômes à coefficients complexes. *Corps algébriquement clos.* On dit qu'un corps commutatif K est algébriquement clos si tout polynôme non constant à coefficients dans K admet au moins une racine dans K.

Cela équivaut à dire que les polynômes de degré 1 sont les seuls polynômes irréductibles.

Tout polynôme à coefficients dans un corps algébriquement clos est scindé.

Autrement dit, soient P un polynôme non constant à coefficients dans K, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ les racines de P dans K, $n_1, n_2, \ldots, n_r$ leurs ordres de multiplicité, et β le coefficient dominant de P. Alors

$$P = \beta \prod_{p=1}^{r} (X - \alpha_p)^{n_p} .$$

Cette décomposition n'est autre que l'unique décomposition en facteurs irréductibles de P, c'est-à-dire que pour tout $p \in [1, r]$, n_p est égal à la valuation de P au point α_p.

Théorème de D'Alembert-Gauss. Le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes est algébriquement clos.

Polynômes conjugués. L'application qui à tout polynôme à coefficients complexes $P = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n X^n$ associe le polynôme $\overline{P} = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{\alpha}_n X^n$ est un automorphisme involutif de l'anneau unitaire $\mathbf{C}[X]$. On dit que les polynômes P et $\overline{P}$ sont conjugués.

Pour tout élément P de $\mathbf{C}[X]$, $\mathrm{d}^{\circ}(\overline{P}) = \mathrm{d}^{\circ}(P)$ et, pour tout nombre complexe α,

$$v_{\overline{\alpha}}(\overline{P}) = v_{\alpha}(P) .$$

En particulier, si α est racine de P, $\overline{\alpha}$ est racine de $\overline{P}$ avec la même multiplicité.

Factorisations classiques

$$X^2 + X + 1 = (X - \mathrm{j})(X - \mathrm{j}^2)$$
$$X^2 - X + 1 = (X + \mathrm{j})(X + \mathrm{j}^2)$$
$$X^2 - 2X\cos\alpha + 1 = (X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}) .$$

Polynômes à coefficients réels. Soit P un élément de $\mathbf{R}[X]$. Pour toute racine α de P dans $\mathbf{C}$, $\overline{\alpha}$ est encore racine de P, avec la même multiplicité.

Les polynômes à coefficients réels irréductibles sur $\mathbf{R}$ sont :

a) les polynômes de degré 1 ;

b) les polynômes du second degré $aX^2 + bX + c$ tels que $b^2 - 4ac < 0$.

Polynômes de degré 3 sous forme réduite. Soient p et q des nombres réels. Le polynôme $X^3 + pX + q$ admet trois racines réelles distinctes si $4p^3 + 27q^2 < 0$, une racine réelle et une seule si $4p^3 + 27q^2 > 0$, une racine double, $-3q/2p$, et une racine simple, $3q/p$, si $4p^3 + 27q^2 = 0$, $p \neq 0$, une racine triple, 0, si $p = q = 0$.

Forme de la factorisation d'un polynôme dans $\mathbf{R}[X]$. Soient P un polynôme non constant à coefficients réels, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ les racines réelles de P, $m_1, m_2, \ldots, m_r$ leurs multiplicités, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s, \overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, \ldots, \overline{\beta}_s$ les racines complexes non réelles de P, $n_1, n_2, \ldots, n_s$ leurs multiplicités et γ le coefficient dominant de P. Alors

$$P = \gamma \prod_{p=1}^{r} (X - \alpha_p)^{m_p} \prod_{q=1}^{s} (X^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(\beta_q)\,X + |\,\beta_q\,|^2)^{n_q}\,.$$

Cette décomposition n'est autre que la décomposition de P en facteurs irréductibles sur $\mathbf{R}$.

En particulier, tout polynôme à coefficients réels est produit d'une famille finie de polynômes à coefficients réels de degré inférieur à 2.

Racines rationnelles. Soit

$$P = \alpha_n X^n + \alpha_{n-1} X^{n-1} + \cdots + \alpha_0$$

un polynôme à coefficients dans $\mathbf{Z}$. Pour qu'un nombre rationnel $r = p/q$ soit racine de P, il faut que p divise α_0 et que q divise α_n. Il faut en outre que $q - p$ divise $P(1)$ et que $q + p$ divise $P(-1)$.

En particulier, si P est unitaire, toute racine rationnelle de P est un entier rationnel.

4. APPLICATIONS

a) Décomposition des fractions rationnelles en éléments simples

Soit E l'ensemble des polynômes unitaires irréductibles à coefficients dans K. Pour tout élément P de E, l'ensemble des fractions rationnelles R de degré strictement négatif telles qu'il existe un entier naturel m tel que $P^m R$ soit un polynôme est un sous-espace vectoriel de $K(X)$, noté $K_P[X]$.

L'espace vectoriel $K(X)$ est somme directe du sous-espace vectoriel $K[X]$ et des sous-espaces vectoriels $K_P[X]$. Autrement dit, toute fraction rationnelle R peut s'écrire d'une manière et d'une seule sous la forme

$$R = U + \sum_{P \in E} R_P\,,$$

où $U \in K[X]$, où, pour tout élément P de E, $R_P \in K_P[X]$ et où la famille $(R_P)_{P \in E}$ est à support fini.

Le polynôme U s'appelle partie entière de R et se note $\mathrm{Pr}_\infty(R)$. Pour tout élément P de E, R_P s'appelle partie principale de R relative à P et se note $\mathrm{Pr}_P(R)$.

Calcul de la partie entière. Si R est écrite sous la forme $R = A/B$, où A et B sont deux polynômes, $B \neq 0$, le polynôme U est le quotient de la division euclidienne de A par B.

Calcul de la partie principale en un pôle. Soit α un scalaire. La partie principale relative au polynôme $X - \alpha$ s'appelle plus simplement partie principale au point α.

Il existe un couple (m, S) et un seul constitué d'un entier rationnel m et d'une fraction rationnelle S tel que

$$R = (X - \alpha)^m S ,$$

α étant substituable dans S et $\tilde{S}(\alpha) \neq 0$.

Si $m \geqslant 0$, α est substituable dans R, et la partie principale de R au point α est nulle.

Si $m < 0$, α n'est pas substituable dans R ; on dit alors que α est un pôle de R. On appelle multiplicité de α l'entier naturel non nul $n = -m$.

Pour déterminer la partie principale au point α, on procède de la manière suivante :

— On effectue dans la fraction $R(X)$ la substitution $X = \alpha + Y$. On obtient ainsi une fraction rationnelle $R_1(Y)$, écrite sous la forme

$$R_1(Y) = \frac{P(Y)}{Y^n Q(Y)}, \quad \text{où} \quad \tilde{P}(0) \neq 0 \quad \text{et} \quad \tilde{Q}(0) \neq 0 .$$

— On procède à la division de P par Q suivant les puissances croissantes de Y à l'ordre $n - 1$; on obtient donc des polynômes U et V tels que

$$P = QV + Y^n U , \qquad \mathrm{d}^\circ(V) \leqslant n - 1 .$$

— Le polynôme V peut s'écrire sous la forme

$$V = \beta_n + \beta_{n-1} Y + \cdots + \beta_1 Y^{n-1} .$$

Dans ces conditions, la partie principale de R au point α est

$$\frac{\beta_n}{(X - \alpha)^n} + \frac{\beta_{n-1}}{(X - \alpha)^{n-1}} + \cdots + \frac{\beta_1}{X - \alpha} .$$

Le coefficient β_1 s'appelle résidu de R au point α.

Cas d'un pôle simple. Soit α un pôle simple de R. Si R est écrite sous la forme $R = \dfrac{A}{(X-\alpha)\,B_1}$, la partie principale au point α est

$$\frac{\tilde{A}(\alpha)}{\tilde{B}_1(\alpha)}\,\frac{1}{X-\alpha}.$$

Si R est écrite sous la forme $R = A/B$, la partie principale est

$$\frac{\tilde{A}(\alpha)}{\tilde{B}'(\alpha)}\,\frac{1}{X-\alpha}.$$

Cas des corps algébriquement clos. Les monômes X^p, où $p \in \mathbf{N}$, et les fractions rationnelles $\dfrac{1}{(X-\alpha)^n}$, où $\alpha \in K$ et $n \in \mathbf{N}^*$, constituent une base de l'espace vectoriel $K(X)$.

Autrement dit, tout élément R de $K(X)$ peut s'écrire d'une manière et d'une seule sous la forme

$$R = \sum_{p=0}^{+\infty} \gamma_p X^p + \sum_{\alpha \in K, n \in \mathbf{N}^*} \beta_{\alpha,n} \frac{1}{(X-\alpha)^n},$$

où, pour tout $p \in \mathbf{N}$, $\gamma_p \in K$, et où pour tout $\alpha \in K$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\beta_{\alpha,n} \in K$. Cette décomposition s'appelle décomposition sur K de R en éléments simples.

De plus, le polynôme $\sum_{p=0}^{+\infty} \gamma_p X^p$ n'est autre que la partie entière $\mathrm{Pr}_\infty(R)$ de la fraction rationnelle R, tandis que pour tout élément α de K, la fraction rationnelle $\sum_{n \in \mathbf{N}^*} \beta_{\alpha,n} \dfrac{1}{(X-\alpha)^n}$ n'est autre que la partie principale $\mathrm{Pr}_\alpha(R)$ de la fraction rationnelle R au point α.

Ainsi,

$$R = \mathrm{Pr}_\infty(R) + \sum_{\alpha \in K} \mathrm{Pr}_\alpha(R).$$

La somme des résidus de R relatifs à ses différents pôles est égale au terme constant de la partie entière de XR ; en particulier, si $d^o(R) < -1$, la somme des résidus est nulle.

Cas du corps des nombres réels. Soit α un pôle non réel d'ordre n d'un

élément R de $\mathbf{R}(X)$. Alors $\bar{\alpha}$ est pôle de R, avec la même multiplicité. La partie principale de R relative au polynôme unitaire irréductible sur $\mathbf{R}$

$$P = X^2 + pX + q = (X - \alpha)(X - \bar{\alpha})$$

s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k X + b_k}{(X^2 + pX + q)^k} \quad \text{où} \quad a_k, b_k \in \mathbf{R}$$

(décomposition en éléments simples de seconde espèce).

***b)* Polynôme symétrique à plusieurs indéterminées**

On dit qu'un élément P de $K[X_1, X_2, \ldots, X_p]$ est symétrique si, pour toute permutation σ de $[1, p]$,

$$P(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(p)}) = P(X_1, X_2, \ldots, X_p).$$

Pour tout élément n de $[1, p]$, on appelle polynôme symétrique élémentaire de degré n le polynôme

$$S_n = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_n \leqslant p} X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_n}.$$

En particulier,

$$S_1 = \sum_{i=1}^{p} X_i, \quad S_2 = \sum_{i<j} X_i X_j, \quad S_p = \prod_{i=1}^{p} X_i.$$

Pour tout polynôme symétrique P à p indéterminées, il existe un polynôme Q à p indéterminées et un seul tel que

$$P(X_1, X_2, \ldots, X_p) = Q(S_1, S_2, \ldots, S_p).$$

Cette relation, jointe aux relations entre coefficients et racines, permet de calculer la valeur prise par un polynôme symétrique sur les racines d'un polynôme scindé.

***c)* Elimination de l'indéterminée entre deux polynômes**

L'élimination de l'indéterminée entre deux polynômes

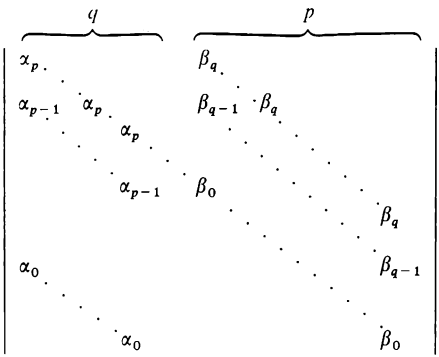
$$A = \alpha_p X^p + \alpha_{p-1} X^{p-1} + \cdots + \alpha_0 \quad \alpha_p \neq 0$$
$$B = \beta_q X^q + \beta_{q-1} X^{q-1} + \cdots + \beta_0 \quad \beta_q \neq 0$$

est la recherche d'une condition nécessaire et suffisante pour que ces polynômes aient au moins une racine commune.

Pour que le degré du P.G.C.D. de A et B soit supérieur à 1, il faut et il suffit qu'il existe deux polynômes non nuls U et V tels que

$$AU + BV = 0 \qquad d^o(U) \leqslant q - 1, d^o(V) \leqslant p - 1,$$

ou encore que le déterminant ci-dessous soit nul.



Ce déterminant s'appelle résultant des polynômes A et B.

Le résultant d'un polynôme A et de son polynôme dérivé s'appelle discriminant de A. Par exemple, les discriminants de $aX^2 + bX + c$ et de $X^3 + pX + q$ sont respectivement $a(4ac - b^2)$ et $4p^3 + 27q^2$.

Lorsque le corps K est algébriquement clos, les polynômes A et B ont au moins une racine commune si et seulement si leur résultant est nul.

Le résultant de $aX + b$ et de $a'X + b'$ est $ab' - ba'$. Le résultant de $aX^2 + bX + c$ et de $a'X^2 + b'X + c'$ est

$$(ca' - ac')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb').$$

d) Transformation d'une équation algébrique sur le corps C

Soient $A = \beta \prod_{p=1}^{r} (X - \alpha_p)^{n_p}$ un polynôme à coefficients complexes et $R = P/Q$ une fraction rationnelle tels que A et Q soient premiers entre eux. On appelle transformé de A par R le polynôme

$$\beta \prod_{p=1}^{r} (Y - R(\alpha_p))^{n_p}.$$

A un facteur scalaire près, c'est le résultant des polynômes A et $P - YQ$, considérés comme éléments de $\mathbf{C}[Y][X]$.

Equations réciproques. On dit qu'un polynôme

$$A = \alpha_n X^n + \alpha_{n-1} X^{n-1} + \cdots + \alpha_0$$

est réciproque de première espèce (resp. de seconde espèce) si, pour tout entier naturel k inférieur à $n/2$,

$$\alpha_{n-k} = \alpha_k \qquad (\text{resp. } \alpha_{n-k} = -\alpha_k) .$$

En mettant en facteur éventuellement $X - 1$ et $X + 1$, on se ramène au cas où A est un polynôme réciproque de première espèce de degré pair $n = 2p$, n'admettant ni 1 ni -1 pour racine. Le transformé de A par $R = X + 1/X$ est alors un polynôme de degré p.

III. ALGÈBRE LINÉAIRE ET MULTILINÉAIRE

1. ESPACES VECTORIELS ET APPLICATIONS LINÉAIRES

a) Espaces vectoriels

On appelle espace vectoriel sur un corps commutatif K un ensemble E muni d'une loi de composition, notée additivement, et d'une loi d'action de K sur E, notée multiplicativement, ces lois satisfaisant aux conditions suivantes :

— muni de l'addition, E est un groupe commutatif ;

— pour tout couple (x, y) d'éléments de E et pour tout couple (α, β) d'éléments de K,

$$1.x = x\,, \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)\, x$$

$$(\alpha + \beta)\, x = \alpha x + \beta x\,, \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y\,.$$

Soient I un ensemble non vide et $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces vectoriels sur K. Le produit de la famille $(E_i)_{i \in I}$, muni des deux lois

$$(x_i)_{i \in I} + (y_i)_{i \in I} = (x_i + y_i)_{i \in I}\,, \qquad \alpha(x_i)_{i \in I} = (\alpha x_i)_{i \in I}\,,$$

est un espace vectoriel sur K, appelé espace vectoriel produit et noté $\prod_{i \in I} E_i$.

b) Applications linéaires

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps commutatif K. On dit qu'une application u de E dans F est linéaire (ou que u est un morphisme d'espaces vectoriels) si, pour tout couple (x, y) d'éléments de E et pour tout couple (α, β) d'éléments de K,

$$u(\alpha x + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y)\,.$$

Pour toute application linéaire u de E dans F et pour toute application linéaire v de F dans G, l'application composée $v \circ u$ est linéaire.

On dit qu'une application linéaire u de E dans F est un isomorphisme de E sur F si elle admet une application réciproque et si u^{-1} est linéaire.

On démontre que toute application linéaire bijective est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Une application linéaire de E dans lui-même s'appelle endomorphisme de E, un isomorphisme de E sur lui-même, automorphisme de E.

Les automorphismes d'un espace vectoriel E constituent un sous-groupe du groupe des permutations de E, appelé groupe linéaire de E et noté $\mathbf{GL}(E)$.

c) Sous-espaces vectoriels

Soit $(\boldsymbol{x}_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments d'un espace vectoriel E. On dit qu'un vecteur $\boldsymbol{x}$ de E est combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{x}_i$ s'il existe une famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ de scalaires à support fini (i.e. nuls sauf sur une partie finie de I) telle que

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i \in I} \alpha_i \boldsymbol{x}_i .$$

On dit qu'une partie E' d'un espace vectoriel E sur K est un sous-espace vectoriel de E si E' est stable pour les deux lois de E et si, munie des lois induites, E' est un espace vectoriel sur K. On démontre que toute partie non vide de E stable pour les deux lois est un sous-espace vectoriel de E.

L'intersection d'un ensemble de sous-espaces vectoriels de E est encore un sous-espace vectoriel de E.

Pour toute partie A de E, l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E contenant A possède un plus petit élément (au sens de la relation d'inclusion), appelé sous-espace vectoriel engendré par A et noté $[A]$. Lorsque $A \neq \varnothing$, $[A]$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A. Lorsque $[A] = E$, on dit que A est génératrice.

Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Le sous-espace vectoriel engendré par $\bigcup_{i \in I} E_i$ s'appelle somme des sous-espaces vectoriels E_i, et se note $\sum_{i \in I} E_i$; c'est l'ensemble des vecteurs de E de la forme $\sum_{i \in I} \boldsymbol{x}_i$, où $(\boldsymbol{x}_i)_{i \in I}$ est un élément à support fini du produit $\prod_{i \in I} E_i$.

Lorsque $I = \{ 1, 2 \}$, la somme de E_1 et de E_2 se note $E_1 + E_2$.

Soient E et F deux espaces vectoriels sur K. L'ensemble des applications de E dans F, muni des lois définies par

$$(f + g)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x}) , \qquad (\alpha f)(\boldsymbol{x}) = \alpha f(\boldsymbol{x}) ,$$

est un espace vectoriel, noté $\mathscr{F}(E, F)$; l'ensemble des applications linéaires de E dans F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(E, F)$, noté $\mathscr{L}(E, F)$.

Lorsque $E = F$, $\mathscr{L}(E, F)$ se note $\mathscr{L}(E)$; muni de l'addition et de la

composition des applications. $\mathscr{L}(E)$ est un anneau. Muni de la loi d'action précédente. $\mathscr{L}(E)$ est une algèbre associative unitaire.

Soit u une application linéaire de E dans F. L'image par u d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F ; en particulier, $u(E)$ est un sous-espace vectoriel de F, appelé image de u et noté Im (u). L'image réciproque par u d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E ; en particulier, $u^{-1}(\{ \mathbf{0} \})$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé noyau de u et noté Ker (u)

$$u \text{ surjective} \Leftrightarrow \text{Im}\,(u) = F, \qquad u \text{ injective} \Leftrightarrow \text{Ker}\,(u) = \{ \mathbf{0} \}.$$

Soit E un espace vectoriel sur K. Pour toute relation d'équivalence R dans E compatible avec la structure de E, la classe d'équivalence E' de $\mathbf{0}$ est un sous-espace vectoriel de E ; pour tout vecteur x de E, la classe de x est $x + E'$. La relation $R(x, y)$ équivaut à la relation $x - y \in E'$.

Réciproquement, pour tout sous-espace vectoriel E' de E, la relation binaire dans E définie par les couples (x, y) tels que $x - y \in E'$ est une relation d'équivalence compatible avec la structure de E. Muni des lois quotients, l'ensemble quotient est un espace vectoriel, appelé quotient de E par E' et noté E/E'. L'application canonique φ de E sur E/E' est linéaire, et Ker $(\varphi) = E'$.

d) Somme directe de sous-espaces vectoriels

La somme $\sum_{i \in I} E_i$ d'une famille $(E_i)_{i \in I}$ de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E est dite directe, et notée $\bigoplus_{i \in I} E_i$, si, pour tout élément x de $\sum_{i \in I} E_i$, la décomposition de x sous la forme $x = \sum_{i \in I} x_i$ est unique. Cela équivaut à dire que, pour tout élément i de I,

$$E_i \cap \sum_{j \neq i} E_j = \{ \mathbf{0} \}.$$

Sous-espaces vectoriels supplémentaires, projecteurs. On dit que deux sous-espaces vectoriels E' et E'' sont supplémentaires dans E si leur somme est directe et égale à E. Cela équivaut à dire que tout vecteur x de E se décompose d'une manière et d'une seule sous la forme

$$x = x' + x'', \qquad x' \in E', x'' \in E''.$$

Les applications $P_{E'} : x \mapsto x'$ et $P_{E''} : x \mapsto x''$ s'appellent projecteur sur E'

parallèlement à E'' et projecteur sur E'' parallèlement à E'.

$$\text{Im}\,(P_{E'}) = E' \qquad \text{Ker}\,(P_{E'}) = E''$$
$$P_{E'}^2 = P_{E'} \qquad P_{E''}^2 = P_{E''}$$
$$P_{E'}\,P_{E''} = P_{E''}\,P_{E'} = 0\,, \qquad P_{E'} + P_{E''} = I_E\,.$$

Réciproquement, soit u un endomorphisme de E tel que $u^2 = u$. Alors les sous-espaces vectoriels Im (u) et Ker (u) sont supplémentaires dans E, et u n'est autre que le projecteur sur Im (u) parallèlement à Ker (u). C'est pourquoi les endomorphismes idempotents s'appellent projecteurs.

Soit plus généralement $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E dont E est somme directe. Tout vecteur x de E se décompose d'une manière et d'une seule sous la forme

$$x = \sum_{i\in I} x_i\,, \qquad x_i \in E_i\,,$$

où la famille $(x_i)_{i\in I}$ est à support fini. Pour tout élément i de I, l'application $P_i : x \mapsto x_i$ est un projecteur, dont l'image est E_i et le noyau $\bigoplus_{j\neq i} E_j$:

$$P_i^2 = P_i\,, \qquad P_i\,P_j = 0 \quad \text{si } i \neq j\,, \qquad \sum_{i\in I} P_i = I_E\,.$$

Soient E_1 un sous-espace vectoriel de E et E_2 un supplémentaire de E_1. La restriction à E_2 de l'application canonique de E sur E/E_1 est un isomorphisme. Soit E_2' un autre supplémentaire de E_1. Le projecteur sur E_2' parallèlement à E_1 induit un isomorphisme de E_2 sur E_2'.

e) Dual d'un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel sur K. Les applications linéaires de E dans K s'appellent formes linéaires sur E. L'espace vectoriel $\mathscr{L}(E, K)$ s'appelle dual de E et se note E^*.

La valeur d'une forme linéaire y^* sur un vecteur x se note $\langle y^*, x\rangle$. On dit que x et y^* sont orthogonaux si $\langle y^*, x\rangle = 0$. On dit qu'une partie A de E et une partie B de E^* sont orthogonales si

$$\forall x \in A,\ \forall y^* \in B\,, \quad \langle y^*, x\rangle = 0\,.$$

L'ensemble des formes linéaires orthogonales à A est un sous-espace vectoriel de E^*, appelé orthogonal de A et noté $A^\perp$. L'ensemble des vecteurs orthogonaux à une partie B de E^* est un sous-espace vectoriel de E, appelé antéorthogonal de B et noté $B^\top$.

$$\forall A \in \mathscr{P}(E)\,, \quad A \subset (A^\perp)^\top\,, \qquad \forall B \in \mathscr{P}(E^*)\,, \quad B \subset (B^\top)^\perp\,.$$

Pour tout sous-espace vectoriel E_1 de E, $(E_1^\perp)^\top = E_1$.

Transposée d'une application linéaire. Soient E et F deux espaces vectoriels sur K et u une application linéaire de E dans F. Il existe une application linéaire de F^* dans E^* et une seule, appelée transposée de u et notée ${}^t u$, telle que

$$\forall x \in E, \forall y^* \in F^*, \quad \langle {}^t u(y^*), x \rangle = \langle y^*, u(x) \rangle .$$

L'application ${}^t u$ n'est autre que $y^* \mapsto y^* \circ u$. L'application $u \mapsto {}^t u$ est linéaire et injective. De plus, ${}^t I_E = I_{E^*}$

$$\forall u \in \mathscr{L}(E, F), \forall v \in \mathscr{L}(F, G), \quad {}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$$

$$\text{Ker } ({}^t u) = [\text{Im } (u)]^\perp , \quad \text{Im } ({}^t u) = [\text{Ker } (u)]^\perp$$

$$\text{Im } (u) = [\text{Ker } ({}^t u)]^\top , \quad \text{Ker } (u) = [\text{Im } ({}^t u)]^\top$$

u surjective $\Leftrightarrow$ ${}^t u$ injective ,

u injective $\Leftrightarrow$ ${}^t u$ surjective ,

u bijective $\Leftrightarrow$ ${}^t u$ bijective .

Dans ce dernier cas,

$$({}^t u)^{-1} = {}^t(u^{-1}) .$$

Bidual. Le dual du dual E^* de E s'appelle bidual de E et se note E^{**}. Pour tout élément x de E, l'application

$$\chi(x) : y^* \mapsto \langle y^*, x \rangle$$

est une forme linéaire sur E^*. L'application $\chi : x \mapsto \chi(x)$ est linéaire et injective ; on l'appelle injection canonique de E dans E^{**} :

$$\forall x \in E, \forall y^* \in E^*, \quad \langle \chi(x), y^* \rangle_{E^*} = \langle y^*, x \rangle_E .$$

f) Familles génératrices, familles libres

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E sur K.

On dit que cette famille est génératrice si la partie de E constituée des vecteurs x_i est génératrice ; autrement dit, tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs x_i.

On dit que cette famille est libre si toute relation linéaire entre les vecteurs x_i est triviale ; autrement dit, pour toute famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ de scalaires à support fini,

$$\sum_{i \in I} \alpha_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I, \quad \alpha_i = 0 .$$

On dit que cette famille est une base si elle est libre et génératrice ; autrement dit, pour tout vecteur x de E, il existe une famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ de

scalaires à support fini et une seule telle que

$$x = \sum_{i \in I} \alpha_i x_i .$$

Pour tout élément i de I, le scalaire α_i s'appelle composant de x relatif à x_i.

Parties libres, parties basiques. Soit S une partie de E.

On dit que la partie S est libre si la famille de vecteurs de E définie par l'injection canonique de S dans E est libre.

On dit que la partie S est basique si elle est libre et génératrice.

2. ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

a) Espace vectoriel engendré par une partie finie

On dit qu'un espace vectoriel E est de dimension finie s'il existe une partie génératrice finie de E. Cela revient à dire qu'il existe une partie basique finie de E.

Soit B une partie basique finie de E à n éléments. Alors toute partie libre L de E est finie et le nombre p d'éléments de L est inférieur à n. De plus, on peut compléter L en une partie basique de E par adjonction de n-p éléments convenablement choisis dans B.

En particulier, toutes les parties basiques de E sont finies et elles ont le même cardinal. Ce cardinal commun s'appelle dimension de E et se note dim E.

b) Dimension de $\mathscr{L}(E, F)$

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur K, $B=(e_j)_{j \in J}$ une base de E et $C = (f_i)_{i \in I}$ une base de F. Pour tout élément (i, j) de $I \times J$, soit u_{ij} l'unique application linéaire de E dans F telle que

$$u_{ij}(e_k) = 0 \quad \text{si} \quad k \neq j , \qquad u_{ij}(e_j) = f_i .$$

Les applications linéaires u_{ij} constituent une base de l'espace vectoriel $\mathscr{L}(E, F)$, dite associée aux bases B et C. En particulier, $\mathscr{L}(E, F)$ est de dimension finie, et

$$\dim \mathscr{L}(E, F) = (\dim E).(\dim F) .$$

Soient E un espace vectoriel sur K et $B = (e_j)_{j \in J}$ une base de E. Pour tout élément j de J, l'unique forme linéaire e_j^* sur E telle que, pour tout

élément k de J,

$$\langle e_j^*, e_k \rangle = \delta_{jk},$$

s'appelle j-ième forme linéaire coordonnée. La famille $(e_j^*)_{j \in J}$ est libre ; pour que ce soit une base de E^*, il faut et il suffit que E soit de dimension finie. Cette base s'appelle base duale de B et se note B^*.

En particulier, pour que E^* soit de dimension finie, il faut et il suffit que E soit de dimension finie. Alors

$$\dim E^* = \dim E.$$

Soient E et F deux espaces vectoriels sur K. Si E et F sont isomorphes et si F est de dimension finie, alors E est de dimension finie et

$$\dim E = \dim F.$$

Réciproquement, si E et F sont de dimension finie et si leurs dimensions sont égales, alors E et F sont isomorphes.

c) Dimension et codimension d'un sous-espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel. On dit qu'un sous-espace vectoriel E' de E est de codimension finie dans E si l'espace vectoriel quotient E/E' est de dimension finie. La dimension de E/E' s'appelle alors codimension de E' dans E et se note $\operatorname{codim}_E E'$. Les sous-espaces vectoriels de codimension 1 dans E s'appellent hyperplans de E.

Pour que E' soit de codimension finie dans E, il faut et il suffit que E' admette un sous-espace vectoriel supplémentaire de dimension finie. Alors, pour tout supplémentaire E'' de E' dans E,

$$\dim E'' = \operatorname{codim}_E E'.$$

Si E est de dimension finie, tout sous-espace vectoriel E' de E est de dimension finie et de codimension finie dans E, et

$$\dim E' + \operatorname{codim}_E E' = \dim E, \qquad E' = E \Leftrightarrow \dim E' = \dim E.$$

Soient E un espace vectoriel, E' et E'' deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie. Alors $E' + E''$ et $E' \cap E''$ sont de dimension finie et

$$\dim (E' + E'') + \dim (E' \cap E'') = \dim E' + \dim E''$$

(relation de Grassmann).

d) Rang d'une partie, rang d'une application linéaire

Soit S une partie d'un espace vectoriel E. On dit que S est de rang fini si $[S]$ est de dimension finie. On appelle alors rang de S et on note rang (S) la dimension de $[S]$. Si E est de dimension finie, S est de rang fini et

$$\text{rang}\,(S) \leqslant \dim E\,.$$

Si S est finie, S est de rang fini et

$$\text{rang}\,(S) \leqslant \text{Card}\,(S)\ ;$$

dans ce cas, S est libre si et seulement si

$$\text{rang}\,(S) = \text{Card}\,(S)\,.$$

Si S est de rang fini, alors, pour tout vecteur x de E, $S' = S \cup \{ x \}$ est de rang fini :

$$\text{rang}\,(S') = \text{rang}\,(S) \qquad \text{si} \quad x \in [S]\,,$$

$$\text{rang}\,(S') = \text{rang}\,(S) + 1 \quad \text{si} \quad x \notin [S]\,.$$

Soient E et F deux espaces vectoriels sur K et u une application linéaire de E dans F. On dit que u est de rang fini si Im (u) est de dimension finie. La dimension de Im (u) s'appelle alors rang de u et se note rang (u).

Pour que u soit de rang fini, il faut et il suffit que Ker (u) soit de codimension finie dans E. Dans ce cas,

$$\text{rang}\,(u) = \dim \text{Im}\,(u) = \text{codim}_E \text{Ker}\,(u)\,.$$

Si E est de dimension finie, u est de rang fini et

$$\text{rang}\,(u) = \dim E - \dim \text{Ker}\,(u)\,.$$

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur K, ayant même dimension n, et u un élément de $\mathscr{L}(E, F)$:

$$u \text{ isomorphisme} \Leftrightarrow u \text{ injectif} \Leftrightarrow u \text{ surjectif} \Leftrightarrow \text{rang}\,(u) = n\,.$$

En particulier, soient E un espace vectoriel de dimension n et u un élément de $\mathscr{L}(E)$:

$$u \text{ automorphisme} \Leftrightarrow u \text{ injectif} \Leftrightarrow u \text{ surjectif} \Leftrightarrow \text{rang}\,(u) = n\,.$$

e) Dualité en dimension finie

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. L'injection canonique de E dans E^{**} est alors un isomorphisme d'espaces vectoriels. Il s'ensuit que l'application $B \mapsto B^*$ est une bijection de l'ensemble des bases de E sur l'ensemble des bases de E^*.

Pour tout sous-espace vectoriel E_1 de E,

$$\dim E_1 + \dim E_1^{\perp} = \dim E \qquad (E_1^{\perp})^{\top} = E_1 .$$

Pour tout sous-espace vectoriel G de E^*,

$$\dim G + \dim G^{\top} = \dim E \qquad (G^{\top})^{\perp} = G .$$

Soient E et F deux espaces vectoriels et u une application linéaire de E dans F. Pour que u soit de rang fini, il faut et il suffit que ${}^t u$ le soit. Alors

$$\operatorname{rang}({}^t u) = \operatorname{rang}(u) .$$

f) Algèbres

On appelle algèbre sur un corps commutatif K un espace vectoriel E sur K muni d'une application bilinéaire de $E \times E$ dans E. Autrement dit, l'ensemble E est muni de deux lois de composition, notées additivement et multiplicativement, et d'une loi d'action de K sur E, ces lois satisfaisant aux conditions suivantes :

— muni de la première et de la troisième loi, E est un espace vectoriel sur K ;

— pour tout triplet (x, y, z) d'éléments de E,

$$x(y + z) = xy + xz , \qquad (y + z)\, x = yx + zx ;$$

— pour tout couple (x, y) d'éléments de E et pour tout couple (α, β) d'éléments de K,

$$(\alpha x)\,(\beta y) = (\alpha\beta)\,(xy) .$$

On dit que l'algèbre E est de dimension finie sur K si l'espace vectoriel sous-jacent l'est. On appelle base de l'algèbre E une base de l'espace vectoriel sous-jacent.

On dit que l'algèbre E est associative si la multiplication l'est, et qu'elle est unitaire, ou unifère, si la multiplication admet un élément neutre e.

Munie des deux lois de composition, une algèbre associative unitaire est un anneau. On dit alors qu'un élément de E est inversible (resp. un diviseur de 0) s'il est inversible (resp. un diviseur de 0) dans l'anneau sous-jacent.

On dit que l'algèbre E est commutative si la multiplication l'est.

Si l'algèbre E est associative, unitaire et non réduite à $\{0\}$, l'application $\alpha \mapsto \alpha e$ est un isomorphisme de K sur une droite de E. On identifie souvent K à Ke par cette application ; on note alors 1 l'élément-unité de E.

Sous-algèbre. On dit qu'une partie E' d'une algèbre E sur K est une sous-algèbre de E si E' est stable pour les trois lois de E et si, munie des lois induites, E' est une algèbre sur K.

Si l'algèbre E est unitaire, les sous-algèbres de E contenant l'élément unité de E sont appelées sous-algèbres unitaires de E. On dit qu'une sous-algèbre unitaire E' de E est pleine si, pour tout élément x de E' inversible dans E, l'inverse de x appartient à E'.

Pour qu'une partie E' d'une algèbre E soit une sous-algèbre de E, il faut et il suffit que E' soit un sous-espace vectoriel de E stable pour la multiplication.

Lorsque l'algèbre E est unitaire, pour que E' soit une sous-algèbre unitaire de E, il faut et il suffit que Ke soit contenu dans E' et que E' soit stable pour les deux lois de composition.

3. MATRICES

a) Matrices et applications linéaires

Soient K un corps commutatif, I et J deux ensembles finis. On appelle matrice de type (I, J) à éléments dans K tout élément de l'ensemble $K^{I \times J}$, c'est-à-dire toute famille $M = (\alpha_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ d'éléments de K dont l'ensemble d'indices est $I \times J$.

Pour tout élément i de I, la famille $(\alpha_{ij})_{j \in J}$ s'appelle i-ième ligne de M ; l'indice i s'appelle indice de ligne. Pour tout élément j de J, la famille $(\alpha_{ij})_{i \in I}$ s'appelle j-ième colonne de M ; l'indice j s'appelle indice de colonne.

Lorsque Card $(I) = 1$, on dit que M est une matrice ligne ; lorsque Card $(J) = 1$, on dit que M est une matrice colonne. Lorsque $I = J$, on dit que M est une matrice carrée.

Lorsque $I = [1, n]$ et que $J = [1, p]$, on dit que M est une matrice à n lignes et p colonnes ; on la représente par un tableau rectangulaire :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1j} & \dots & \alpha_{1p} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2j} & \dots & \alpha_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{ij} & \dots & \alpha_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nj} & \dots & \alpha_{np} \end{pmatrix}.$$

Lorsque $n = p$, on dit que M est une matrice carrée d'ordre n ; la famille (α_{ii}) est appelée diagonale principale de M.

L'ensemble des matrices de type (I, J) à éléments dans K se note $\mathbf{M}_{I,J}(K)$, et l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes se note $\mathbf{M}_{n,p}(K)$. Les ensembles $\mathbf{M}_{I,I}(K)$ et $\mathbf{M}_{n,n}(K)$ se notent plus simplement $\mathbf{M}_I(K)$ et $\mathbf{M}_n(K)$.

Matrice associée à une application linéaire. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur K, $B = (\boldsymbol{e}_j)_{j \in J}$ une base de E, $C = (\boldsymbol{f}_i)_{i \in I}$ une base de F et u une application linéaire de E dans F. Pour tout élément j de J, le vecteur $u(\boldsymbol{e}_j)$ se décompose d'une manière et d'une seule dans la base C sous la forme

$$u(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{i \in I} \alpha_{ij} \boldsymbol{f}_i .$$

La matrice (α_{ij}), de type (I, J), s'appelle matrice associée à l'application linéaire u dans les bases B et C, et se note $M_{B,C}(u)$; elle a pour j-ième colonne la famille des composants dans la base C du transformé par u du j-ième vecteur de la base B.

Lorsque $E = F$ et que $B = C$, la matrice $M_{B,B}(u)$ s'appelle matrice associée à l'endomorphisme u dans la base B et se note plus simplement $M_B(u)$.

L'application $u \mapsto M_{B,C}(u)$ est une bijection de $\mathscr{L}(E, F)$ sur $\mathbf{M}_{I,J}(K)$. Pour tout élément $M = (\alpha_{ij})$ de $\mathbf{M}_{I,J}(K)$, l'unique élément u de $\mathscr{L}(E, F)$ tel que $M_{B,C}(u) = M$ associe au vecteur $\boldsymbol{x} = \sum_{j \in J} \xi_j \boldsymbol{e}_j$ le vecteur $u(\boldsymbol{x}) = \sum_{i \in I} \eta_i \boldsymbol{f}_i$ où, pour tout élément i de I,

$$\eta_i = \sum_{j \in J} \alpha_{ij} \xi_j .$$

En particulier, pour tout élément M de $\mathbf{M}_{I,J}(K)$, il existe une application linéaire u de K^J dans K^I et une seule dont la matrice associée dans les bases canoniques de ces espaces vectoriels soit M ; l'application linéaire u est dite canoniquement associée à la matrice M.

Opérations sur les matrices

Somme de deux matrices. On appelle somme de deux éléments $M=(\alpha_{ij})$ et $M' = (\alpha'_{ij})$ de $\mathbf{M}_{n,p}(K)$, et on note $M + M'$, l'élément (β_{ij}) de $\mathbf{M}_{n,p}(K)$ défini par la relation

$$\beta_{ij} = \alpha_{ij} + \alpha'_{ij} .$$

Produit d'une matrice par un scalaire. On appelle produit d'un élément $M = (\alpha_{ij})$ de $\mathbf{M}_{n,p}(K)$ par un scalaire λ, et on note λM, l'élément (β_{ij}) de $\mathbf{M}_{n,p}(K)$ défini par la relation

$$\beta_{ij} = \lambda\alpha_{ij} .$$

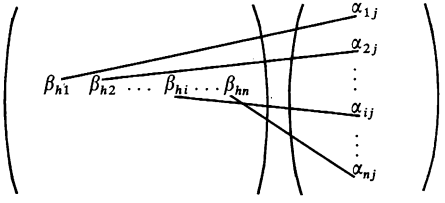
Muni de ces deux lois, l'ensemble $\mathbf{M}_{n,p}(K)$ est un espace vectoriel de dimension np sur K.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives p et n sur K, B une base de E et C une base de F. L'application $u \mapsto M_{B,C}(u)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Produit de deux matrices. On appelle produit d'un élément $M=(\alpha_{ij})$ de $\mathbf{M}_{n,p}(K)$ par un élément $N = (\beta_{hi})$ de $\mathbf{M}_{m,n}(K)$, et on note NM, l'élément (γ_{hj}) de $\mathbf{M}_{m,p}(K)$ défini pour tout couple (h, j) d'indices par la relation

$$\gamma_{hj} = \sum_{i=1}^{n} \beta_{hi}\,\alpha_{ij} .$$

On obtient donc le scalaire γ_{hj} en prenant la h-ième ligne de N, la j-ième colonne de M et en ajoutant les produits des éléments de même indice (règle de multiplication « ligne par colonne »).



Produit de deux matrices

Pour tout couple (M, M') d'éléments de $\mathbf{M}_{n,p}(K)$, pour tout couple (N, N') d'éléments de $\mathbf{M}_{m,n}(K)$ et pour tout couple (λ, μ) de nombres réels,

$$(N + N')\,M = NM + N'M\,,$$
$$N(M + M') = NM + NM'\,,$$
$$(\mu N)\,(\lambda M) = (\mu\lambda)\,(NM)\,.$$

Pour tout élément M de $\mathbf{M}_{n,p}(K)$, pour tout élément N de $\mathbf{M}_{m,n}(K)$ et pour tout élément P de $\mathbf{M}_{l,m}(K)$,

$$(PN)\,M = P(NM)\,.$$

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimensions respectives p, n et m sur K, B une base de E, C une base de F et D une base de G. Pour toute application linéaire u de E dans F et pour toute application linéaire v de F dans G,

$$M_{B,D}(v \circ u) = M_{C,D}(v)\,M_{B,C}(u)\,.$$

Muni des trois lois précédentes, l'ensemble $\mathbf{M}_n(K)$ est une algèbre associative unitaire de dimension n^2 sur K. L'élément unité est la matrice

$$I_n = (\delta_{ij})\,.$$

Soient E un espace vectoriel de dimension n sur K et B une base de E. L'application $u \mapsto M_B(u)$ est un isomorphisme de l'algèbre unitaire $\mathscr{L}(E)$ sur l'algèbre unitaire $\mathbf{M}_n(K)$. Dans cet isomorphisme, le groupe linéaire $\mathbf{GL}(E)$ a pour image le groupe, noté $\mathbf{GL}_n(K)$, des éléments inversibles de l'anneau unitaire des matrices carrées d'ordre n. En particulier, pour tout automorphisme u de E, $M_B(u)$ est inversible et

$$[M_B(u)]^{-1} = M_B(u^{-1})\,.$$

Transposition. Soit $M = (\alpha_{ij})$ un élément de $\mathbf{M}_{n,p}(K)$. On appelle transposée de M et on note ${}^tM$ l'élément (α_{ji}) de $\mathbf{M}_{p,n}(K)$ dont les colonnes sont les lignes de M.

L'application $M \mapsto {}^tM$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbf{M}_{n,p}(K)$ sur l'espace vectoriel $\mathbf{M}_{p,n}(K)$.

Pour tout élément M de $\mathbf{M}_{n,p}(K)$ et pour tout élément N de $\mathbf{M}_{m,n}(K)$,

$${}^t(NM) = {}^tM\,{}^tN\,.$$

Pour tout élément M de $\mathbf{M}_{n,p}(K)$,

$$^t(^tM) = M .$$

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur K, B une base de E, C une base de F, B^* et C^* leurs bases duales. Pour toute application linéaire u de E dans F,

$$M_{C^*,B^*}(^tu) = {}^tM_{B,C}(u) .$$

b) Changement de base

Soient E un espace vectoriel de dimension p sur K, $B=(e_1, e_2, ..., e_p)$ et $B' = (e'_1, e'_2, ..., e'_p)$ deux bases de E. La matrice carrée $P = (\alpha_{ij})$ ayant pour j-ième colonne les composants de e'_j dans la base B,

$$e'_j = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{ij} e_i ,$$

s'appelle matrice de passage de B à B'.

$$P = M_{B',B}(I_E) .$$

Pour tout vecteur x de E, décomposé dans les bases B et B',

$$x = \sum_{i=1}^{p} \xi_i e_i , \qquad x = \sum_{j=1}^{p} \xi'_j e'_j , \qquad \xi_i = \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij} \xi'_j .$$

Pour toute forme linéaire y^* sur E, décomposée dans les bases B^* et B'^*,

$$y^* = \sum_{i=1}^{p} \eta'_i e'^*_i , \qquad y^* = \sum_{j=1}^{p} \eta_j e^*_j , \qquad \eta'_i = \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ji} \eta_j .$$

Soient B'' une troisième base de E et P' la matrice de passage de B' à B''. La matrice de passage de B à B'' est PP'. En particulier, P est inversible et la matrice de passage de B' à B est P^{-1}.

Effet de changements de bases sur la matrice associée à une application linéaire. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur K, B et B' deux bases de E, C et C' deux bases de F, P la matrice de passage de B à B' et Q la matrice de passage de C à C'. Pour toute application linéaire u de E dans F,

$$M_{B',C'}(u) = Q^{-1} M_{B,C}(u) P .$$

En particulier, pour tout endomorphisme u de E,

$$M_{B'}(u) = P^{-1} M_B(u)\, P\,.$$

Matrices équivalentes. Soient n et p deux entiers naturels non nuls. La relation binaire définie par les couples (M, M') d'éléments de $\mathbf{M}_{n,p}(K)$ tels qu'il existe un élément S de $\mathbf{GL}_p(K)$ et un élément T de $\mathbf{GL}_n(K)$ vérifiant

$$M' = TMS$$

est une relation d'équivalence. Les matrices M et M' sont dites équivalentes.

Matrices semblables. Soit p un entier naturel non nul. La relation binaire définie par les couples (M, M') d'éléments de $\mathbf{M}_p(K)$ tels qu'il existe un élément Q de $\mathbf{GL}_p(K)$ vérifiant

$$M' = QMQ^{-1}$$

est une relation d'équivalence. Les matrices M et M' sont dites semblables.

c) Rang d'une matrice

On appelle rang d'un élément M de $\mathbf{M}_{n,p}(K)$, et on note rang (M), le rang de l'application linéaire de K^p dans K^n canoniquement associée à M.

Le rang de M est égal à celui de la matrice transposée :

$$\text{rang}\,({}^tM) = \text{rang}\,(M)\,.$$

Le rang de M est donc égal au rang des vecteurs colonnes de M dans K^n, et au rang des vecteurs lignes de M dans K^p.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur K, B une base de E et C une base de F. Pour tout élément u de $\mathscr{L}(E, F)$,

$$\text{rang}\,(u) = \text{rang}\,(M_{B,C}(u))\,.$$

Pour que deux éléments de $\mathbf{M}_{n,p}(K)$ soient équivalents, il faut et il suffit qu'ils aient même rang.

Soit M un élément de $\mathbf{M}_n(K)$:

$$M \text{ inversible} \Leftrightarrow {}^tM \text{ inversible} \Leftrightarrow \text{rang}\,(M) = n\,.$$

d) Matrices carrées remarquables

Matrice diagonale. Une matrice carrée (α_{ij}) est dite diagonale si, pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $[1, n]$, $\alpha_{ij} = 0$. Une telle matrice se note

$$D = \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

où $\alpha_h = \alpha_{hh}$.

Les matrices diagonales constituent une sous-algèbre commutative unitaire pleine de $\mathbf{M}_n(K)$. Pour que D soit inversible, il faut et il suffit que tous ses éléments diagonaux soient non nuls ; dans ces conditions,

$$D^{-1} = \operatorname{diag}(\alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1}, \ldots, \alpha_n^{-1}).$$

Matrice triangulaire. Une matrice carrée (α_{ij}) est dite triangulaire (ou trigonale) supérieure si, pour tout couple (i, j) d'éléments de $[1, n]$ tel que $i > j$, $\alpha_{ij} = 0$. Une telle matrice se note

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \alpha_2 & \\ & & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Les matrices triangulaires supérieures constituent une sous-algèbre unitaire pleine de $\mathbf{M}_n(K)$. Pour que T soit inversible, il faut et il suffit que tous ses éléments diagonaux soient non nuls ; dans ces conditions,

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{-1} & & * \\ & \alpha_2^{-1} & \\ & & \\ 0 & & \alpha_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

Matrice décomposée en blocs. Soient $M = (\alpha_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n et p un élément de $[1, n-1]$. La matrice M se note encore

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

où $A \in \mathbf{M}_p(K)$, $B \in \mathbf{M}_{p,n-p}(K)$, $C \in \mathbf{M}_{n-p,p}(K)$ et $D \in \mathbf{M}_{n-p}(K)$.

$$\lambda \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} + \lambda' \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda A + \lambda' A' & \lambda B + \lambda' B' \\ \lambda C + \lambda' C' & \lambda D + \lambda' D' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}.$$

Les matrices de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

constituent une sous-algèbre unitaire pleine de $\mathbf{M}_n(K)$. Pour que M soit inversible, il faut et il suffit que A et D le soient ; dans ces conditions

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}.$$

On définit de même les matrices de matrices, les matrices diagonales de matrices et les matrices triangulaires de matrices.

4. DÉTERMINANTS

a) Applications multilinéaires

Soient p un entier naturel non nul, $E_1, E_2, \ldots, E_p$ et F des espaces vectoriels sur K. On dit qu'une application S de l'ensemble produit $\prod_{j=1}^{p} E_j$ dans F est multilinéaire si, pour tout élément j de $[1, p]$, toute application partielle de E_j dans F associée à S est linéaire. Lorsque $F = K$, on dit que S est une forme multilinéaire.

Lorsque les espaces vectoriels $E_1, E_2, \ldots, E_p$ sont égaux à un même espace vectoriel E, on dit que S est une application p-linéaire sur E à valeurs dans F. Lorsque $F = K$, on dit que S est une forme p-linéaire sur E.

Les applications p-linéaires sur E à valeurs dans F constituent un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{F}(E^p, F)$ de toutes les applications de E^p dans F. Ce sous-espace vectoriel est noté $\mathscr{M}_p(E, F)$. L'espace vectoriel des formes p-linéaires sur E se note $\mathscr{M}_p(E)$.

Applications p-linéaires alternées. Soient E et F deux espaces vectoriels sur K et p un entier naturel non nul. On dit qu'une application p-linéaire S

sur E à valeurs dans F est alternée si, pour toute suite $(x_1, x_2, ..., x_p)$ de vecteurs de E contenant deux vecteurs égaux x_i et x_j, où $i \neq j$,

$$S(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_p) = 0 .$$

On dit que S est antisymétrique si, pour toute permutation de $[1, p]$ et pour toute suite $(x_1, x_2, ..., x_p)$ de vecteurs de E,

$$S(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma)\ S(x_1, x_2, ..., x_p),$$

où $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ.

Si S est alternée, S est antisymétrique. La réciproque est vraie lorsque la caractéristique du corps K est différente de 2.

Si S est alternée, on ne change pas la valeur de S sur une suite $(x_1, x_2, ..., x_p)$ de vecteurs de E en ajoutant à l'un de ces vecteurs une combinaison linéaire des autres vecteurs.

En particulier, si l'un des vecteurs $x_1, x_2, ..., x_p$ est une combinaison linéaire des autres, alors $S(x_1, x_2, ..., x_p) = 0$.

Les applications p-linéaires alternées sur E à valeurs dans F constituent un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_p(E, F)$, noté $\mathscr{A}_p(E, F)$. L'espace vectoriel des formes p-linéaires alternées sur E se note $\mathscr{A}_p(E)$.

On appelle produit extérieur de p formes linéaires $y_1^*, y_2^*, ..., y_p^*$ sur E, et on note $y_1^* \wedge y_2^* \wedge ... \wedge y_p^*$, l'application de E^p dans K définie par la relation

$$(y_1^* \wedge y_2^* \wedge ... \wedge y_p^*)\,(x_1, x_2, ..., x_p) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon(\sigma) \langle y_1^*, x_{\sigma(1)} \rangle \langle y_2^*, x_{\sigma(2)} \rangle ... \langle y_p^*, x_{\sigma(p)} \rangle .$$

Le produit extérieur de p formes linéaires sur E est une forme p-linéaire alternée sur E.

b) Déterminant de *n* vecteurs

Soit E un espace vectoriel de dimension finie non nulle n sur K. L'espace vectoriel $\mathscr{A}_n(E)$ des formes n-linéaires alternées sur E est une droite.

Soit $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E. Il existe une forme n-linéaire alternée sur E et une seule, notée Det_B, prenant la valeur 1 sur $(e_1, e_2, ..., e_n)$, à savoir $e_1^* \wedge e_2^* \wedge ... \wedge e_n^*$. Cette forme n-linéaire alternée constitue une base de l'espace vectoriel $\mathscr{A}_n(E)$.

Soit f une forme n-linéaire alternée sur E. Pour toute suite $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de n vecteurs de E,

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(e_1, e_2, ..., e_n).\mathrm{Det}_B\,(x_1, x_2, ..., x_n) .$$

Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une suite de n vecteurs de E, évalués dans la base B :

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ij}\, e_i .$$

Alors

$$\mathrm{Det}_B\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, \xi_{1,\sigma(1)}\, \xi_{2,\sigma(2)} \cdots \xi_{n,\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, \xi_{\sigma(1),1}\, \xi_{\sigma(2),2} \cdots \xi_{\sigma(n),n} .$$

Pour que n vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de E soient linéairement indépendants, il faut et il suffit que

$$\mathrm{Det}_B\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0 .$$

c) Déterminant d'un endomorphisme

Soient E un espace vectoriel de dimension finie non nulle n sur K et u un endomorphisme de E. Pour toute forme n-linéaire f sur E, l'application f_u de E^n dans K définie par la formule

$$f_u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f[u(x_1), u(x_2), \ldots, u(x_n)]$$

est une forme n-linéaire sur E.

L'application $u_n : f \mapsto f_u$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(E)$ laissant stable le sous-espace vectoriel $\mathscr{A}_n(E)$. Puisque $\dim \mathscr{A}_n(E) = 1$, l'endomorphisme de $\mathscr{A}_n(E)$ coïncidant avec u_n est une homothétie ; son rapport s'appelle déterminant de l'endomorphisme u, et se note $\mathrm{Det}\, u$.

Ainsi, le scalaire $\mathrm{Det}\, u$ est défini par la formule fondamentale suivante : pour toute forme n-linéaire alternée f sur E, et pour toute suite $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n vecteurs de E,

$$f[u(x_1), u(x_2), \ldots, u(x_n)] = (\mathrm{Det}\, u).f(x_1, x_2, \ldots, x_n) .$$

Pour toute base B de E et pour toute suite $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de vecteurs de E,

$$\mathrm{Det}_B\,[u(x_1), u(x_2), \ldots, u(x_n)] = (\mathrm{Det}\, u).\mathrm{Det}_B\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) .$$

En particulier, soit $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E ; alors

$$\mathrm{Det}\, u = \mathrm{Det}_B\,[u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n)] .$$

Le déterminant de l'application identique de E est égal à 1 ; plus généralement, le déterminant de l'homothétie de rapport α est égal à α^n :

$$\text{Det}\,(\alpha I_E) = \alpha^n .$$

Le déterminant du composé de deux endomorphismes de E est égal au produit de leurs déterminants ; autrement dit, pour tout couple (u, v) d'endomorphismes de E,

$$\text{Det}\,(vu) = (\text{Det}\,v).(\text{Det}\,u) .$$

Le déterminant du transposé ${}^t u$ d'un endomorphisme u de E est égal au déterminant de u :

$$\text{Det}\,{}^t u = \text{Det}\,u .$$

Pour que u soit inversible, il faut et il suffit que $\text{Det}\,u \neq 0$; dans ces conditions,

$$\text{Det}\,u^{-1} = (\text{Det}\,u)^{-1} .$$

Déterminant d'une matrice carrée. Soit M une matrice carrée d'ordre n à éléments dans K. On appelle déterminant de M, et on note Det M, le déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de K^n. C'est encore le déterminant dans la base canonique de K^n de l'endomorphisme de K^n canoniquement associé à M.

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie sur K. Alors, pour toute base B de E,

$$\text{Det}\,[M_B(u)] = \text{Det}\,u .$$

Soit M une matrice carrée d'ordre n :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1j} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2j} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{ij} & \dots & \alpha_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nj} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} ;$$

son déterminant se note :

$$\text{Det } M = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1j} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2j} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{ij} & \dots & \alpha_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nj} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} .$$

Le déterminant de la matrice I_n est égal à 1 ; plus généralement, le déterminant de la matrice αI_n est égal à α^n :

$$\text{Det } (\alpha I_n) = \alpha^n .$$

Le déterminant du produit de deux matrices carrées d'ordre n est égal au produit de leurs déterminants ; autrement dit, pour tout couple (M, N) d'éléments de $\mathbf{M}_n(K)$,

$$\text{Det } NM = (\text{Det } N).(\text{Det } M) .$$

Le déterminant de la transposée ${}^tM$ d'une matrice carrée M d'ordre n est égal au déterminant de M :

$$\text{Det } {}^tM = \text{Det } M .$$

Autrement dit : le déterminant des vecteurs lignes de M est égal au déterminant des vecteurs colonnes de M.

On ne change pas la valeur du déterminant d'une matrice carrée M en ajoutant à un de ses vecteurs colonnes (resp. vecteurs lignes) une combinaison linéaire des autres vecteurs colonnes (resp. vecteurs lignes) de M.

Lorsqu'on échange deux colonnes, ou deux lignes, d'une matrice carrée M, le déterminant de M est transformé en son opposé.

Pour que M soit inversible, il faut et il suffit que $\text{Det } M \neq 0$; dans ces conditions,

$$\text{Det } M^{-1} = (\text{Det } M)^{-1} .$$

Soient E un espace vectoriel de dimension n sur K, B et B' deux bases de E, et P la matrice de passage de B à B'. Alors, pour toute suite $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de vecteurs de E,

$$\text{Det}_B (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\text{Det } P).\text{Det}_{B'} (x_1, x_2, \dots, x_n) .$$

d) Calcul de déterminants

Cofacteurs et déterminants mineurs. Soit $M = (\alpha_{ij})$ un élément de $\mathbf{M}_n(K)$, $n > 1$. On appelle matrice mineure associée à l'élément α_{ij}, et on note A_{ij}, l'élément de $\mathbf{M}_{n-1}(K)$ obtenu en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne de M.

Le déterminant de la matrice A_{ij} s'appelle déterminant mineur associé à l'élément α_{ij}.

Pour tout élément j de $[1, n]$,

$$\text{Det } M = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \text{ Det } A_{ij} .$$

Le second membre s'appelle développement du déterminant de la matrice M suivant la j-ième colonne de M.

Pour tout élément i de $[1, n]$,

$$\text{Det } M = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \text{ Det } A_{ij} .$$

Le second membre s'appelle développement du déterminant de la matrice M suivant la i-ième ligne de M.

Pour tout couple (i, j) d'éléments de $[1, n]$, le scalaire $\alpha'_{ij} = (-1)^{i+j} \text{ Det } A_{ij}$ s'appelle cofacteur de l'élément α_{ij}. La matrice $M' = (\alpha'_{ij})$ est un élément de $\mathbf{M}_n(K)$, qu'on appelle matrice des cofacteurs de la matrice M. La matrice transposée de M' s'appelle matrice complémentaire de la matrice M, et et se note $\tilde{M}$.

$$\tilde{M} . M = M . \tilde{M} = (\text{Det } M) . I_n .$$

Autrement dit :

— pour tout couple (h, j) d'éléments de $[1, n]$,

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+h} \alpha_{ij} \text{ Det } A_{ih} = \delta_{hj} \text{ Det } M ;$$

— pour tout couple (i, k) d'éléments de $[1, n]$,

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \alpha_{ij} \text{ Det } A_{kj} = \delta_{ik} \text{ Det } M .$$

En particulier, si M est inversible,

$$M^{-1} = (\text{Det } M)^{-1} \tilde{M} .$$

Déterminants de matrices carrées remarquables. Soit

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \alpha_2 & \\ & & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

une matrice triangulaire supérieure d'ordre n ; alors

$$\text{Det } T = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i .$$

Soit

$$M = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1r} \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{rr} \end{pmatrix}$$

une matrice triangulaire de matrices (les éléments diagonaux étant des matrices carrées). Alors

$$\text{Det } M = \prod_{i=1}^{r} \text{Det } A_{ii} .$$

En particulier, soit

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & A_r \end{pmatrix}$$

une matrice diagonale de matrices carrées. Alors

$$\text{Det } M = \prod_{i=1}^{r} \text{Det } A_i .$$

Déterminants de Vandermonde. Pour toute suite $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de scalaires,

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^j & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_i & \dots & \alpha_i^j & \dots & \alpha_i^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_n & \dots & \alpha_n^j & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{h>k} (\alpha_h - \alpha_k) = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{h<k} (\alpha_h - \alpha_k).$$

e) Application à la détermination du rang d'une matrice

Soit $M = (\alpha_{ij})$ un élément de $\mathbf{M}_{n,p}(K)$. On appelle matrice extraite de M toute matrice de la forme $(\alpha_{ij})_{i \in I, j \in J}$, où I est une partie de $[1, n]$ et J une partie de $[1, p]$.

On suppose désormais que M n'est pas nulle ; soit r son rang.

Le rang de toute matrice extraite de M est inférieur à r.

Toute matrice carrée inversible extraite de M est d'ordre inférieur à r.

Il existe une matrice carrée inversible extraite de M et d'ordre r ; une telle matrice s'appelle matrice principale extraite de M.

Soit $P = (\alpha_{ij})_{i \in I, j \in J}$ une matrice carrée extraite de M. On appelle matrice bordante associée à P toute matrice extraite de M obtenue en prenant un entier i_0 n'appartenant pas à I et un entier j_0 n'appartenant pas à J, et en ajoutant à la matrice P la ligne constituée par les éléments $\alpha_{i_0 j}$, $j \in J$, et la colonne constituée par les éléments $\alpha_{i j_0}$, $i \in I \cup \{ i_0 \}$.

Pour qu'une matrice carrée inversible P extraite de M soit principale, il faut et il suffit qu'il n'existe pas de matrice bordante inversible associée à P.

f) Orientations d'un espace vectoriel de dimension finie

Soit E un espace vectoriel de dimension finie non nulle sur $\mathbf{R}$. Les automorphismes de E dont le déterminant est strictement positif constituent un sous-groupe distingué de $\mathbf{GL}(E)$, noté $\mathbf{GL}_+(E)$. Le groupe quotient $\mathbf{GL}(E)/\mathbf{GL}_+(E)$ a deux éléments. Les automorphismes de E dont le déterminant est strictement positif (resp. strictement négatif) sont dits directs (resp. rétrogrades).

Pour tout couple (B, B') de bases de E, où $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $B' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$, soit $u_{B,B'}$ l'unique automorphisme de E tel que, pour tout élément j de $[1, n]$, $u(e_j) = e'_j$. La relation binaire définie par les couples (B, B') de bases de E tels que $u_{B,B'}$ appartienne à $\mathbf{GL}_+(E)$ est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence s'appellent orientations de E. On appelle espace vectoriel orienté le couple constitué d'un espace vectoriel E de dimension finie non nulle sur $\mathbf{R}$ et d'une orientation de E.

Pour que deux bases B et B' de E définissent la même orientation de E, il faut et il suffit que

$$\mathrm{Det}_B\,(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n) > 0\,.$$

5. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

a) Cas général, cas de Cramer

On appelle système de n équations linéaires à p inconnues un système d'équations de la forme

$$(S') \quad \begin{cases} \alpha_{11}\,\xi_1 + \alpha_{12}\,\xi_2 + \cdots + \alpha_{1j}\,\xi_j + \cdots + \alpha_{1p}\,\xi_p = \beta_1 \\ \alpha_{21}\,\xi_1 + \alpha_{22}\,\xi_2 + \cdots + \alpha_{2j}\,\xi_j + \cdots + \alpha_{2p}\,\xi_p = \beta_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{i1}\,\xi_1 + \alpha_{i2}\,\xi_2 + \cdots + \alpha_{ij}\,\xi_j + \cdots + \alpha_{ip}\,\xi_p = \beta_i \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n1}\,\xi_1 + \alpha_{n2}\,\xi_2 + \cdots + \alpha_{nj}\,\xi_j + \cdots + \alpha_{np}\,\xi_p = \beta_n \end{cases}.$$

Soient M la matrice (α_{ij}), r son rang, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ ses vecteurs colonnes, u l'application linéaire de K^p dans K^n canoniquement associée à M et $\boldsymbol{b} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$.

Cas de Cramer. Il y a existence et unicité de la solution si et seulement si

$$r = n = p\,.$$

L'unique solution est définie par la relation

$$\xi_j = \frac{\mathrm{Det}\,(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n)}{\mathrm{Det}\,(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n)}\,.$$

(formule de Cramer).

Ainsi, lorsque $ab' - ba' \neq 0$, le système

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

admet pour unique solution

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \qquad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}\,.$$

Cas général. Soient (S') un système linéaire de n équations à p inconnues, $M = (\alpha_{ij})$ la matrice du système homogène associé (S), et $\boldsymbol{b}$ le second membre de (S'). On considère la matrice M' obtenue en ajoutant à M un $(p + 1)$-ième vecteur colonne égal à $\boldsymbol{b}$.

Soit P une matrice principale extraite de M ; on appelle matrice caractéristique associée à P toute matrice bordante de P dans M', où la colonne bordante est extraite de $\boldsymbol{b}$. Il y a donc $n - r$ matrices caractéristiques, où $r = \text{rang}\,(M)$. Les déterminants de ces matrices sont appelés déterminants caractéristiques.

Si $P = (\alpha_{ij})_{i \in I, j \in J}$, les équations d'indice i appartenant à I s'appellent équations principales, les inconnues d'indice j appartenant à J s'appellent inconnues principales.

Si M est non nulle, il est équivalent de dire :

— Le système linéaire (S') a au moins une solution.
— Il existe une matrice principale P extraite de M telle que tous les déterminants caractéristiques associés à P soient nuls.
— Pour toute matrice principale P extraite de M, tous les déterminants caractéristiques associés à P sont nuls.

En pratique, lorsque r est non nul, on résout le système (S') de la manière suivante :

— On choisit une matrice principale P extraite de la matrice M du système homogène associé à (S').
— On calcule les $n - r$ déterminants caractéristiques associés à P :

a) ou bien l'un de ces déterminants est non nul ; alors le système linéaire (S') n'admet pas de solution ;

b) ou bien tous ces déterminants sont nuls ; alors le système linéaire (S') admet au moins une solution.

— Dans ce dernier cas, le système (S') est équivalent au système (S'_1) constitué des équations principales. Deux éventualités se présentent :

1. Le rang r est égal au nombre p d'inconnues ; le système linéaire (S'_1) est alors un système de Cramer, qu'on peut résoudre à l'aide des formules de Cramer.

2. Le rang r est strictement inférieur au nombre p d'inconnues. On peut alors faire passer les $p - r$ inconnues non principales dans le second membre, et leur donner des valeurs arbitraires λ_j. On calcule enfin les r inconnues principales à l'aide des formules de Cramer.

Systèmes homogènes de $n + 1$ équations à $n + 1$ inconnues de rang n.

Soient n un entier naturel non nul et (S) le système linéaire homogène de $n + 1$ équations à $n + 1$ inconnues suivant :

$$\alpha_{i1}\,\xi_1 + \cdots + \alpha_{ij}\,\xi_j + \cdots + \alpha_{i,n+1}\,\xi_{n+1} = 0\,, \qquad i \in [1, n+1]\,.$$

On suppose que le rang du système (S) est égal à n, et que, par exemple, les n premières équations sont principales. Soient $\Delta_1, \ldots, \Delta_j, \ldots, \Delta_{n+1}$ les cofacteurs des éléments $\alpha_{n+1,1}, \ldots, \alpha_{n+1,j}, \ldots, \alpha_{n+1,n+1}$. L'un au moins de ces cofacteurs est non nul, et l'espace vectoriel des solutions du système linéaire homogène (S) n'est autre que la droite engendrée par le vecteur de composants $\Delta_1, \ldots, \Delta_j, \ldots, \Delta_{n+1}$.

En particulier, lorsque le système

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$$

est de rang 2, ses solutions sont définies par

$$\frac{x}{bc' - cb'} = \frac{y}{ca' - ac'} = \frac{z}{ab' - ba'}\,.$$

b) Application au calcul de l'inverse d'une matrice

Soit M une matrice carrée inversible d'ordre n à éléments dans K. Soient u l'endomorphisme de K^n canoniquement associé à M et $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ la base canonique de K^n. Pour tout élément j de $[1, n]$, soit $\boldsymbol{x}_j$ l'unique vecteur de K^n tel que

$$u(\boldsymbol{x}_j) = \boldsymbol{e}_j\,.$$

La détermination de $\boldsymbol{x}_j$ se ramène à la résolution d'un système de Cramer de n équations linéaires à n inconnues. La matrice M^{-1} a pour vecteurs colonnes $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$.

6. VALEURS PROPRES, VECTEURS PROPRES

a) Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme

Soient E un espace vectoriel sur K et u un endomorphisme de E. Pour tout scalaire λ et pour tout entier naturel r, on note $E_{\lambda,r}$ le noyau de l'endo-

morphisme $(u - \lambda I_E)^r$. Le sous-espace vectoriel $E_{\lambda,1}$ se note plus simplement E_λ. L'ensemble $\bigcup_{r=0}^{+\infty} E_{\lambda,r}$ est un sous-espace vectoriel de E, noté F_λ.

On dit que λ est une valeur propre de u si $E_\lambda \neq \{ 0 \}$. Les sous-espaces vectoriels E_λ et F_λ s'appellent alors sous-espace propre et sous-espace caractéristique (ou spectral) associés à la valeur propre λ. Les éléments non nuls de E_λ s'appellent vecteurs propres associés à λ.

La somme des sous-espaces propres associés aux valeurs propres de u est directe ; il en est de même de la somme des sous-espaces caractéristiques.

On dit que u est diagonalisable si E est somme directe des sous-espaces propres, et scindé si E est somme directe des sous-espaces caractéristiques.

Pour que u soit diagonalisable, il faut et il suffit que u soit scindé et que, pour toute valeur propre λ de u,

$$E_\lambda = F_\lambda .$$

Lorsque E est de dimension finie, cela revient à dire qu'il existe une base B de E constituée de vecteurs propres de u, c'est-à-dire telle que la matrice $M_B(u)$ soit diagonale.

Si E est de dimension n, tout endomorphisme de E ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.

Lorsque E est de dimension finie, on dit que u est trigonalisable s'il existe une base B de E telle que la matrice $M_B(u)$ soit triangulaire.

Pour que u soit trigonalisable, il faut et il suffit que u soit scindé. En particulier, tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie sur un corps algébriquement clos est trigonalisable.

Polynôme minimal. On dit qu'un endomorphisme u d'un espace vectoriel E sur K admet un polynôme minimal s'il existe un élément non nul Q de $K[X]$ tel que $Q(u) = 0$.

Dans ce cas, l'idéal $\mathfrak{I}$ de $K[X]$ constitué des polynômes Q tels que $Q(u) = 0$ n'est pas réduit à $\{ 0 \}$; le générateur de l'idéal $\mathfrak{I}$ s'appelle polynôme minimal de u.

Lorsque le corps K est algébriquement clos, tout endomorphisme admettant un polynôme minimal est scindé.

Cas de la dimension finie. Lorsque l'espace vectoriel E est de dimension finie, tout endomorphisme de E admet un polynôme minimal.

Si, de plus, le corps K est algébriquement clos, un endomorphisme de E est diagonalisable si et seulement si les racines de son polynôme minimal sont simples.

b) **Polynôme caractéristique**

Soit $M = (\alpha_{ij})$ un élément de $\mathbf{M}_n(K)$. On appelle polynôme caractéristique de M et on note $\delta_M(X)$ le déterminant de l'élément $XI_n - M$ de $\mathbf{M}_n[K(X)]$:

$$\delta_M(X) = \begin{vmatrix} X - \alpha_{11} & -\alpha_{12} & \dots & -\alpha_{1i} & \dots & -\alpha_{1n} \\ -\alpha_{21} & X - \alpha_{22} & \dots & -\alpha_{2i} & \dots & -\alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\alpha_{i1} & -\alpha_{i2} & \dots & X - \alpha_{ii} & \dots & -\alpha_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\alpha_{n1} & -\alpha_{n2} & \dots & -\alpha_{ni} & \dots & X - \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de M est un polynôme unitaire de degré n.

Soient u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur K, B une base de E et $M_B(u)$ la matrice associée à u dans cette base. Le polynôme Det $[XI_n - M_B(u)]$ est indépendant de la base B ; on l'appelle polynôme caractéristique de u et on le note $\delta_u(X)$, ou encore Det $(XI_E - u)$.

L'ensemble des valeurs propres de u est constitué des racines dans K du polynôme caractéristique de u.

Pour toute valeur propre λ de u, la dimension du sous-espace caractéristique F_λ est égale à la multiplicité $m(\lambda)$ de la racine λ du polynôme caractéristique de u. La dimension du sous-espace propre E_λ est inférieure à $m(\lambda)$.

Pour que u soit diagonalisable, il faut et il suffit que son polynôme caractéristique soit scindé et que, pour toute valeur propre λ de u,

$$\dim E_\lambda = m(\lambda) .$$

Toute matrice carrée à éléments complexes est semblable à une matrice triangulaire et, si ses valeurs propres sont distinctes, à une matrice diagonale.

IV. ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS ET HERMITIENS

1. FORMES QUADRATIQUES

a) Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

Soient K un corps de caractéristique différente de 2 et E un espace vectoriel sur K. On appelle forme quadratique sur E une application Q de E dans K satisfaisant aux deux conditions suivantes :

— $\forall x \in E, \forall \alpha \in K, \quad Q(\alpha x) = \alpha^2 Q(x)$;

— l'application

$$(x, y) \mapsto Q(x + y) - Q(x) - Q(y)$$

est une forme bilinéaire sur E.

Soit S une forme bilinéaire symétrique sur E. L'application $x \mapsto S(x, x)$ est une forme quadratique sur E, dite associée à S.

Soit Q une forme quadratique sur E. L'application

$$(x, y) \mapsto \tfrac{1}{2}[Q(x + y) - Q(x) - Q(y)]$$

est une forme bilinéaire symétrique sur E, appelée forme polaire de Q.

L'application qui à toute forme bilinéaire symétrique sur E fait correspondre la forme quadratique associée est un isomorphisme de l'espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques sur E sur l'espace vectoriel des formes quadratiques sur E, dont l'isomorphisme réciproque est l'application qui à toute forme quadratique sur E associe sa forme polaire.

Application linéaire associée à une forme bilinéaire symétrique. Pour tout vecteur y de E, l'application $f_y : x \mapsto S(x, y)$ est une forme linéaire sur E ; l'application $f : y \mapsto f_y$ est une application linéaire de E dans E^*, dite associée à S.

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad S(x, y) = \langle f(y), x \rangle = \langle f(x), y \rangle .$$

Orthogonalité. On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si $S(x, y) = 0$. On dit qu'un vecteur est isotrope s'il est orthogonal à lui-

même. On dit que deux parties A et B de E sont orthogonales si

$$\forall x \in A, \forall y \in B, \qquad S(x, y) = 0 .$$

L'ensemble des vecteurs orthogonaux à A est un sous-espace vectoriel de E, noté A^0.

$$\forall A \in \mathscr{P}(E), \qquad A \subset A^{00} \quad \text{et} \quad A^{000} = A^0 .$$

L'orthogonal E^0 de E s'appelle noyau de S ; c'est encore le noyau de l'application linéaire associée à S. On dit que S est dégénérée si $E^0 \neq \{0\}$.

On dit qu'une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est orthogonale si, pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de I, les vecteurs x_i et x_j sont orthogonaux ; on dit que cette famille est orthonormale si

$$\forall i \in I, \forall j \in I, \qquad S(x_i, x_j) = \delta_{ij} .$$

Groupe orthogonal. On dit qu'un automorphisme u d'un espace vectoriel E est orthogonal relativement à une forme quadratique Q (ou relativement à sa forme polaire S) si

$$\forall x \in E, \qquad Q[u(x)] = Q(x) .$$

Les automorphismes orthogonaux constituent un sous-groupe de $\mathbf{GL}(E)$, appelé groupe orthogonal de Q et noté $\mathbf{O}(Q)$.

b) Cas d'un espace vectoriel de dimension finie

Soient E un espace vectoriel de dimension n sur K, S une forme bilinéaire symétrique sur E et f l'application linéaire associée à S. Pour toute base $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E, on appelle matrice associée à S dans la base B, et on note $M_B(S)$, la matrice $(\alpha_{ij}) = (S(e_i, e_j)) = M_{B,B^*}(f)$. On appelle discriminant de S dans la base B, et on note $\Delta_B(S)$, le déterminant de $M_B(S)$.

Soient x et y deux vecteurs de E,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i , \qquad y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i .$$

Alors

$$S(x, y) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \xi_i \eta_j , \qquad Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} \xi_i^2 + 2 \sum_{i<j} \alpha_{ij} \xi_i \xi_j .$$

L'application $S \mapsto M_B(S)$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques sur E sur l'espace vectoriel des matrices symétriques d'ordre n. En particulier, la dimension de l'espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques sur E est $n(n+1)/2$.

Soient B' une deuxième base de E et P la matrice de passage de B à B'. Alors

$$M_{B'}(S) = {}^tPM_B(S)\,P\,, \qquad \Delta_{B'}(S) = (\mathrm{Det}\,P)^2\,\Delta_B(S)\,.$$

Rang. On appelle rang de S, et on note rang (S), le rang de l'application linéaire f :

$$\mathrm{rang}\,(S) = \mathrm{rang}\,(f) = \mathrm{codim}_E\,E^0\,.$$

Pour tout sous-espace vectoriel F de E,

$$\dim F^0 \geqslant \dim E - \dim F\,.$$

Si S est non dégénérée,

$$\dim F^0 = \dim E - \dim F\,, \qquad F^{00} = F\,.$$

Bases orthogonales. Pour qu'une base B de E soit orthogonale relativement à S, il faut et il suffit que la matrice $M_B(S)$ soit diagonale ; pour que la base B soit orthonormale, il faut et il suffit que la matrice $M_B(S)$ soit la matrice unité.

Il existe au moins une base orthogonale de E ; une telle base contient $n - r$ vecteurs isotropes, où $r = \mathrm{rang}\,(S)$, lesquels constituent une base du noyau de S.

En particulier, si S est non dégénérée, toute base orthogonale de E est constituée de vecteurs non isotropes.

Groupe des rotations. Soient E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et Q une forme quadratique non dégénérée. L'application $u \mapsto \mathrm{Det}\,u$ est un morphisme surjectif du groupe orthogonal $\mathbf{O}(Q)$ sur le sous-groupe $\{-1, 1\}$ du groupe multiplicatif K^*. Le noyau de ce morphisme est un sous-groupe distingué de $\mathbf{O}(Q)$, appelé groupe des rotations.

Matrices orthogonales, matrices de rotation. On dit qu'une matrice carrée M d'ordre n à éléments dans K est orthogonale si elle est inversible et si $M^{-1} = {}^tM$. Cela revient à dire que l'endomorphisme de K^n canoniquement associé à M est orthogonal relativement à la forme quadratique canonique sur K^n.

Les matrices orthogonales constituent un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(K)$, noté $\mathbf{O}_n(K)$.

L'application $M \mapsto \operatorname{Det} M$ est un morphisme de $\mathbf{O}_n(K)$ sur le groupe $\{-1, 1\}$. Le noyau de ce morphisme est un sous-groupe distingué de $\mathbf{O}_n(K)$, appelé groupe des matrices de rotation.

2. ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS

a) Formes bilinéaires sur un espace vectoriel réel

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$. On dit qu'une forme quadratique Q sur E est positive si

$$\forall x \in E, \qquad Q(x) \geqslant 0 .$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz. Soient Q une forme quadratique positive sur E et S la forme polaire de Q. Pour tout couple (x, y) de vecteurs de E,

$$[S(x, y)]^2 \leqslant Q(x)\, Q(y)$$

(inégalité de Cauchy-Schwarz) et

$$\sqrt{Q(x + y)} \leqslant \sqrt{Q(x)} + \sqrt{Q(y)}$$

(inégalité triangulaire).

Théorème d'inertie de Sylvester. Soient E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbf{R}$, S une forme bilinéaire symétrique sur E de rang r et Q la forme quadratique associée. Soit p (resp. q) la plus grande des dimensions des sous-espaces vectoriels F de E tels que la restriction de Q à F soit positive (resp. négative) non dégénérée. Pour toute base orthogonale $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E, le cardinal de l'ensemble des éléments i de $[1, n]$ tels que $Q(e_i) > 0$ (resp. $Q(e_i) < 0$) est égal à p (resp. à q). De plus,

$$p + q = r .$$

b) Espaces vectoriels euclidiens

On appelle espace vectoriel euclidien le couple constitué d'un espace vectoriel E sur $\mathbf{R}$ et d'une forme bilinéaire symétrique S sur E dont la forme quadratique associée est positive non dégénérée. La forme bilinéaire S s'appelle produit scalaire, et se note $(x, y) \mapsto (x \mid y)$, ou encore $(x, y) \mapsto x.y$. L'application

$$x \mapsto \| x \| = \sqrt{Q(x)}$$

est une norme, dite euclidienne.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité si et seulement si les vecteurs x et y sont colinéaires ; l'inégalité triangulaire est une égalité si et seulement si les vecteurs x et y sont colinéaires et de même sens.

Pour que deux vecteurs x et y soient orthogonaux, il faut et il suffit que

$$\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 \qquad \text{(théorème de Pythagore)}.$$

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_p$ des vecteurs de E deux à deux orthogonaux. Alors

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \| x_i \|^2 .$$

Procédé d'orthonormalisation de Schmidt. Soient E un espace vectoriel euclidien, $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une famille orthonormale de vecteurs de E, F le sous-espace vectoriel de E engendré par cette famille et x un vecteur de E n'appartenant pas à F. Il existe alors un vecteur e_{p+1} de E et un seul tel que

— la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_{p+1})$ soit orthonormale ;
— le vecteur e_{p+1} appartienne au sous-espace vectoriel $F \oplus \mathbf{R}x$;
— le nombre réel $(e_{p+1} \mid x)$ soit positif.

Le vecteur e_{p+1} est égal à $y/\| y \|$, où

$$y = x - \sum_{j=1}^{p} (x \mid e_j)\, e_j .$$

Cas de la dimension finie. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie. Il existe une base orthonormale de E.

Toute famille orthonormale de vecteurs de E peut être complétée en une base orthonormale de E.

c) Adjoint d'un endomorphisme

Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension finie et u un endomorphisme de E. Il existe un endomorphisme de E et un seul, appelé adjoint de u et noté u^*, tel que

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \qquad (u(x) \mid y) = (x \mid u^*(y)) .$$

L'application $u \mapsto u^*$ est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathscr{L}(E)$. De plus,

$$(I_E)^* = I_E$$
$$\forall u \in \mathscr{L}(E), \forall v \in \mathscr{L}(E), \qquad (vu)^* = u^* v^*$$

$$\text{Ker}\,(u^*) = [\text{Im}\,(u)]^0\ ; \qquad \text{Im}\,(u^*) = [\text{Ker}\,(u)]^0$$
$$\text{rang}\,(u^*) = \text{rang}\,(u)\ , \qquad \text{Det}\,u^* = \text{Det}\,u$$
$$u \in \mathbf{GL}(E) \Leftrightarrow u^* \in \mathbf{GL}\,(E)\ .$$

Dans ce dernier cas,

$$(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*\ .$$

Pour tout sous-espace vectoriel F de E,

$$u(F) \subset F \Leftrightarrow u^*(F^0) \subset F^0\ .$$

Enfin, pour toute base orthonormale B de E,

$$M_B(u^*) = {}^tM_B(u)\ .$$

Endomorphisme autoadjoint. On dit qu'un endomorphisme u de E est autoadjoint si $u^* = u$.

L'application

$$S_u : (x, y) \mapsto (u(x) \mid y)$$

est alors une forme bilinéaire symétrique sur E.

L'application $u \mapsto S_u$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel des endomorphismes autoadjoints sur l'espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques sur E, transformant les automorphismes autoadjoints en les formes bilinéaires symétriques non dégénérées.

On dit qu'un endomorphisme u de E est antiautoadjoint si $u^* = -u$.

Représentation d'un endomorphisme autoadjoint par une matrice symétrique. Soit u un endomorphisme de E.

Si u est autoadjoint (resp. antiautoadjoint), alors, pour toute base orthonormale B de E, la matrice $M_B(u)$ est symétrique (resp. antisymétrique).

Réciproquement, s'il existe une base orthonormale B de E telle que $M_B(u)$ soit symétrique (resp. antisymétrique), alors u est autoadjoint (resp. antiautoadjoint).

C'est pourquoi les endomorphismes autoadjoints (resp. antiautoadjoints) sont encore appelés endomorphismes symétriques (resp. antisymétriques).

d) Produit vectoriel, produit mixte

Isomorphisme d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie sur son dual. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie. Pour tout élément a de E, l'application $j_a : x \mapsto (x \mid a)$ est une forme linéaire sur E. L'application $j : a \mapsto j_a$ est un isomorphisme de E sur son dual.

Produit mixte de n vecteurs. Soient E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension n et $(x_1, x_2, ..., x_n)$ une suite de n vecteurs de E. Le déterminant de ces n vecteurs dans une base orthonormale directe ne dépend pas de la base considérée ; on l'appelle produit mixte des vecteurs $x_1, x_2, ..., x_n$ et on le note Det $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Si on change l'orientation de E, le produit mixte de n vecteurs est changé en son opposé.

Pour tout endomorphisme u de E,

$$\text{Det}\,[u(x_1), u(x_2), ..., u(x_n)] = (\text{Det}\,u).\text{Det}\,(x_1, x_2, ..., x_n)\,.$$

En particulier, le produit mixte de n vecteurs de E est invariant par toute rotation.

Produit vectoriel de $n-1$ vecteurs. Soient E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension n et $(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ une suite de $n-1$ vecteurs de E. Il existe un vecteur a de E et un seul tel que, pour tout vecteur y de E, le produit mixte Det $(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y)$ soit égal à $(y \mid a)$. Le vecteur a s'appelle produit vectoriel des vecteurs $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ et se note $x_1 \times x_2 \times ... \times x_{n-1}$.

L'application $(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) \mapsto x_1 \times x_2 \times ... \times x_{n-1}$ est une application $(n-1)$-linéaire alternée sur E à valeurs dans E.

Pour que le produit vectoriel des vecteurs $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ soit nul, il faut et il suffit que la famille $(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ ne soit pas libre.

Le produit vectoriel de $n-1$ vecteurs est orthogonal à chacun d'eux. Si la famille $(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ est libre, la famille

$$(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_1 \times x_2 \times ... \times x_{n-1})$$

est une base directe de E.

Cas où $n = 3$. Soient x et y des vecteurs de E, (a, b, c) et (a', b', c') leurs composants dans une base orthonormale directe. Les composants de $x \times y$ sont

$$(bc' - cb',\ ca' - ac',\ ab' - ba')\,.$$

Pour tout couple (x, y) de vecteurs de E,

$$\| x \times y \|^2 + (x.y)^2 = \| x \|^2 \| y \|^2 \quad \text{(identité de Lagrange)}\,.$$

Pour tout triplet (x, y, z) de vecteurs de E,

$$x \times (y \times z) = (x \mid z)\, y - (x \mid y)\, z \qquad \text{(formule de Gibbs)}$$

et

$$x \times (y \times z) + y \times (z \times x) + z \times (x \times y) = 0 \quad \text{(identité de Jacobi)}.$$

Pour tout quadruplet (x, y, z, t) de vecteurs de E,

$$((x \times y) \mid (z \times t)) = (x \mid z).(y \mid t) - (x \mid t).(y \mid z).$$

L'application qui à tout vecteur a de E associe l'endomorphisme $x \mapsto a \times x$ de E est un isomorphisme de l'espace vectoriel E sur l'espace vectoriel des endomorphismes antisymétriques de E.

3. ESPACES VECTORIELS HERMITIENS

a) Forme sesquilinéaire hermitienne

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbf{C}$. On dit qu'une application u de E dans F est semi-linéaire si

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \forall \alpha \in \mathbf{C}, \forall \beta \in \mathbf{C}, \quad u(\alpha x + \beta y) = \bar{\alpha} u(x) + \bar{\beta} u(y).$$

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$. On dit qu'une application S de E^2 dans $\mathbf{C}$ est une forme sesquilinéaire sur E si :

— pour tout élément y de E, l'application $x \mapsto S(x, y)$ est semi-linéaire ;
— pour tout élément x de E, l'application $y \mapsto S(x, y)$ est linéaire.

On dit que la forme sesquilinéaire S est hermitienne si

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad S(y, x) = \overline{S(x, y)}.$$

Forme hermitienne. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$. On appelle forme hermitienne sur E une application Q de E dans $\mathbf{R}$ satisfaisant aux deux conditions suivantes :

— $\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbf{C}, \quad Q(\alpha x) = \alpha \bar{\alpha} Q(x)$;
— l'application

$$(x, y) \mapsto [Q(x + y) - Q(x - y)] + i[Q(x + iy) - Q(x - iy)]$$

est une forme sesquilinéaire sur E.

Soit S une forme sesquilinéaire hermitienne sur E. L'application $x \mapsto S(x, x)$ est une forme hermitienne sur E, dite associée à S.

Soit Q une forme hermitienne sur E. L'application

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{4}[Q(y + x) - Q(y - x)] + \frac{i}{4}[Q(y + ix) - Q(y - ix)]$$

est une forme sesquilinéaire hermitienne sur E, appelée forme polaire de Q.

L'application qui à toute forme sesquilinéaire hermitienne sur E fait correspondre la forme hermitienne associée est un isomorphisme du **R**-espace vectoriel des formes sesquilinéaires hermitiennes sur E sur le **R**-espace vectoriel des formes hermitiennes sur E, dont l'isomorphisme réciproque est l'application qui à toute forme hermitienne associe sa forme polaire.

Application semi-linéaire associée à une forme sesquilinéaire hermitienne. Pour tout vecteur x de E, l'application $f_x : y \mapsto S(x, y)$ est une forme linéaire sur E ; l'application $f : x \mapsto f_x$ est une application semi-linéaire de E dans E^*, dite associée à S :

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \qquad S(x, y) = \langle f(x), y \rangle = \overline{\langle f(y), x \rangle}.$$

Orthogonalité. Les définitions des vecteurs orthogonaux, du noyau et des formes non dégénérées données dans le cas des formes bilinéaires symétriques restent valables dans le cas des formes sesquilinéaires hermitiennes, *mutatis mutandis*.

Groupe unitaire. On dit qu'un automorphisme u d'un espace vectoriel E sur **C** est unitaire relativement à une forme hermitienne Q (ou relativement à sa forme polaire S) si

$$\forall x \in E, \qquad Q[u(x)] = Q(x).$$

Les automorphismes unitaires constituent un sous-groupe de $\mathbf{GL}(E)$, appelé groupe unitaire de Q et noté $\mathbf{U}(Q)$.

b) Cas d'un espace vectoriel de dimension finie

Adjointe d'une matrice. Soit M un élément de $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$. On appelle adjointe de M, et on note M^*, la matrice

$$M^* = \overline{{}^tM} = {}^t\overline{M}.$$

$\forall M \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbf{C}), \forall N \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbf{C}), \forall \alpha \in \mathbf{C}, \forall \beta \in \mathbf{C}, \quad (\alpha M + \beta N)^* = \bar{\alpha} M^* + \bar{\beta} N^*$

$\forall M \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbf{C}), \forall N \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbf{C}), \quad (NM)^* = M^* N^*$

$\forall M \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbf{C}), \quad M^{**} = M.$

On dit qu'une matrice carrée M à éléments complexes est hermitienne si $M^* = M$.

Les matrices hermitiennes constituent un sous-espace vectoriel de dimension n^2 du **R**-espace vectoriel $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$.

Matrice associée à une forme sesquilinéaire hermitienne. Soient E un

espace vectoriel de dimension n sur $\mathbf{C}$ et S une forme sesquilinéaire hermitienne sur E. Pour toute base $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E, on appelle matrice associée à S dans la base B, et on note $M_B(S)$, la matrice $(\alpha_{ij}) = (S(e_i, e_j))$. On appelle discriminant de S dans la base B, et on note $\Delta_B(S)$, le déterminant de $M_B(S)$.

Soient x et y des vecteurs de E,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i , \quad y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i .$$

Alors

$$S(x, y) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \bar{\xi}_i \eta_j , \quad Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} | \xi_i |^2 + 2 \sum_{i<j} \mathrm{Re}\,(\alpha_{ij} \bar{\xi}_i \xi_j) .$$

L'application $S \mapsto M_B(S)$ est un isomorphisme du $\mathbf{R}$-espace vectoriel des formes sesquilinéaires hermitiennes sur E sur le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des matrices hermitiennes d'ordre n. En particulier, la dimension du $\mathbf{R}$-espace vectoriel des formes sesquilinéaires sur E est n^2.

Soient B' une deuxième base de E et P la matrice de passage de B à B'. Alors

$$M_{B'}(S) = P^* M_B(S) P . \qquad \Delta_{B'}(S) = | \mathrm{Det}\, P |^2 \Delta_B(S) .$$

Déterminant d'un automorphisme unitaire. Soient E un espace vectoriel de dimension finie non nulle sur $\mathbf{C}$ et Q une forme hermitienne non dégénérée. L'application $u \mapsto \mathrm{Det}\, u$ est un morphisme surjectif du groupe unitaire $\mathbf{U}(Q)$ sur le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1.

Matrices unitaires. On dit qu'une matrice carrée M d'ordre n à éléments dans $\mathbf{C}$ est unitaire si elle est inversible et si $M^{-1} = M^*$. Cela revient à dire que l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ canoniquement associé à M est unitaire relativement à la forme hermitienne canonique sur $\mathbf{C}^n$.

Les matrices unitaires constituent un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$, noté $\mathbf{U}_n(\mathbf{C})$.

c) Formes hermitiennes positives

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$. On dit qu'une forme hermitienne Q sur E est positive si

$$\forall x \in E , \qquad Q(x) \geqslant 0 .$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz devient

$$| S(x, y) |^2 \leqslant Q(x) Q(y) .$$

L'inégalité triangulaire et le théorème d'inertie de Sylvester s'étendent aussitôt au cas des formes hermitiennes positives.

d) Espaces vectoriels hermitiens

On appelle espace vectoriel hermitien le couple constitué d'un espace vectoriel E sur $\mathbf{C}$ et d'une forme sesquilinéaire hermitienne S sur E dont la forme hermitienne associée est positive non dégénérée. La forme sesquilinéaire S s'appelle produit scalaire hermitien, et se note $(x, y) \mapsto (x \mid y)$. L'application

$$x \mapsto \| x \| = \sqrt{Q(x)}$$

est une norme, dite hermitienne.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité si et seulement si les vecteurs x et y sont colinéaires ; l'inégalité triangulaire est une égalité si et seulement si les vecteurs x et y sont colinéaires et de même sens, c'est-à-dire s'il existe un couple (α, β) de nombres réels positifs non tous deux nuls tel que $\alpha x = \beta y$.

La théorie est alors calquée sur le cas des espaces vectoriels euclidiens.

e) Adjoint d'un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel hermitien de dimension finie. La définition et les propriétés de l'adjoint d'un endomorphisme u de E sont les mêmes que dans le cas d'un espace vectoriel euclidien, à ceci près que

$$\operatorname{Det} u^* = \overline{\operatorname{Det} u} \quad \text{et} \quad M_B(u^*) = M_B(u)^* .$$

Endomorphisme autoadjoint. On dit qu'un endomorphisme u de E est autoadjoint si $u^* = u$.

L'application

$$S_u : (x, y) \mapsto (u(x) \mid y)$$

est alors une forme sesquilinéaire hermitienne sur E.

L'application $u \mapsto S_u$ est un isomorphisme du $\mathbf{R}$-espace vectoriel des endomorphismes autoadjoints sur le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des formes sesquilinéaires hermitiennes sur E, transformant les automorphismes autoadjoints en les formes sesquilinéaires hermitiennes non dégénérées :

$$u^* = u \Leftrightarrow \forall x \in E , \qquad (u(x) \mid x) \in \mathbf{R} .$$

Représentation d'un endomorphisme autoadjoint par une matrice hermitienne. Soit u un endomorphisme de E.

Si u est autoadjoint, pour toute base orthonormale B de E, la matrice $M_B(u)$ est hermitienne.

Réciproquement, s'il existe une base orthonormale B de E telle que $M_B(u)$ soit hermitienne, u est autoadjoint.

Valeurs propres d'un endomorphisme autoadjoint. Soient E un espace vectoriel hermitien de dimension finie et u un endomorphisme autoadjoint de E. Les valeurs propres de u sont réelles, et il existe une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres de u.

Diagonalisation des matrices hermitiennes. Soit M une matrice hermitienne. Alors M est diagonalisable. Plus précisément, il existe une matrice diagonale réelle D et une matrice unitaire P telles que

$$M = PDP^{-1}.$$

Soit M une matrice symétrique réelle. Il existe une matrice diagonale réelle D et une matrice orthogonale réelle P telles que

$$M = PDP^{-1}.$$

V. GÉOMÉTRIE AFFINE ET GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

1. ESPACES AFFINES

a) Espaces affines

Soit E un espace vectoriel sur un corps commutatif K. On appelle espace affine attaché à E le couple constitué d'un ensemble A et d'une application, notée $(M, \boldsymbol{x}) \mapsto M + \boldsymbol{x}$, de $A \times E$ dans A telle que, pour tout élément M de A, $M + \boldsymbol{0} = M$, que, pour tout couple $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ de vecteurs de E, $(M + \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{y} = M + (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$ et que, pour tout couple (P, Q) d'éléments de A, il existe un vecteur $\boldsymbol{x}$ de E et un seul tel que $Q = P + \boldsymbol{x}$; ce vecteur se note $\boldsymbol{PQ}$.

Soit O un point de A. Le couple (A, O) s'appelle espace affine muni d'une origine. L'application $M \mapsto \boldsymbol{OM}$ est une bijection de A sur E, qui permet d'identifier l'espace affine A à l'espace vectoriel E. Réciproquement, tout espace vectoriel E peut être considéré comme un espace affine attaché à lui-même, grâce à l'application $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$.

b) Applications affines

Soient E et F deux espaces vectoriels sur K, A et B des espaces affines attachés respectivement à E et à F. On dit qu'une application $\boldsymbol{f}$ de A dans B est affine s'il existe une application linéaire u de E dans F telle que, pour tout couple (P, Q) de points de A,

$$\boldsymbol{f}(P)\boldsymbol{f}(Q) = u(\boldsymbol{PQ}) .$$

Autrement dit, pour tout point M de A et pour tout vecteur $\boldsymbol{x}$ de E,

$$\boldsymbol{f}(M + \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(M) + u(\boldsymbol{x}) .$$

Une telle application linéaire u est unique ; on l'appelle application linéaire associée à l'application affine $\boldsymbol{f}$.

Pour toute application affine $\boldsymbol{f}$ de A dans B et pour toute application affine $\boldsymbol{g}$ de B dans C, l'application composée $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$ est affine. De plus, l'application linéaire associée à $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$ est la composée $v \circ u$ des applications linéaires u et v associées à $\boldsymbol{f}$ et à $\boldsymbol{g}$.

On dit qu'une application affine f de A dans B est un isomorphisme de A sur B si elle admet une application réciproque et si f^{-1} est affine. On démontre que toute application affine bijective est un isomorphisme d'espaces affines. Pour qu'une application affine soit un isomorphisme de A sur B, il faut et il suffit que l'application linéaire associée soit un isomorphisme de E sur F.

Une application affine de A dans lui-même s'appelle endomorphisme de A, un isomorphisme de A sur lui-même, automorphisme de A.

Les automorphismes d'un espace affine A constituent un sous-groupe du groupe des permutations de A, appelé groupe affine de A et noté $\mathbf{GA}(A)$. L'application qui à tout automorphisme f de A fait correspondre l'endomorphisme u de E associé à f est un morphisme surjectif du groupe affine $\mathbf{GA}(A)$ sur le groupe linéaire $\mathbf{GL}(E)$.

c) Sous-espaces affines

On dit qu'une partie A' d'un espace affine A attaché à un espace vectoriel E est un sous-espace (ou une variété linéaire) affine de A si, pour tout point M de A', l'ensemble E' des vecteurs de E de la forme $\boldsymbol{MN}$, où N appartient à A', est un sous-espace vectoriel de E.

Pour qu'une partie non vide A' de A soit un sous-espace affine de A, il suffit qu'il existe un point M de A' satisfaisant à la condition précédente. Le sous-espace vectoriel E' ne dépend pas du point M considéré ; on l'appelle direction du sous-espace affine A'.

La relation binaire définie par les couples de sous-espaces affines non vides ayant même direction est une relation d'équivalence, appelée parallélisme.

On dit qu'un sous-espace affine est un hyperplan si sa direction est un hyperplan de E.

On dit qu'un espace affine attaché à un espace vectoriel E est de dimension finie si E est de dimension finie. On appelle alors dimension de A, et on note dim A, la dimension de E. Les espaces affines de dimension 0 sont réduits à un point ; les espaces affines de dimension 1 sont appelés droites, les espaces affines de dimension 2, plans. Soit A un espace affine de dimension n ; les hyperplans de A ne sont autres que les sous-espaces affines de A dont la dimension est $n - 1$.

L'intersection d'un ensemble de sous-espaces affines de A est encore un sous-espace affine de A.

Pour toute partie P de A, l'ensemble des sous-espaces affines de A contenant P possède un plus petit élément, appelé sous-espace affine engendré par P et noté $[P]$. Lorsque $[P] = A$, on dit que P est génératrice.

2. BARYCENTRES. PARTIES CONVEXES D'UN ESPACE AFFINE

Barycentres. Soient A un espace affine attaché à un espace vectoriel E sur K, $(M_1, M_2, \ldots, M_n)$ une suite finie de points de A et $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ une suite d'éléments de K. Si la somme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ n'est pas nulle, il existe un point G de A et un seul, appelé barycentre des points M_i affectés des coefficients α_i, tel que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{GM}_i = \boldsymbol{0} .$$

Pour tout point O de A, le point G est déterminé par la relation

$$G = O + \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{OM}_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} .$$

Pour qu'une partie P de A soit un sous-espace affine de A, il faut et il suffit que, pour toute suite finie $(M_1, M_2, \ldots, M_n)$ de points de P et pour toute suite $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de scalaires de somme non nulle, le barycentre des points M_i affectés des coefficients α_i appartienne à P.

Soient A et B deux espaces affines attachés à des espaces vectoriels E et F sur K. Pour qu'une application f de A dans B soit affine, il faut et il suffit que, pour toute suite finie $(M_1, M_2, \ldots, M_n)$ de points de A et pour toute suite $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de scalaires de somme non nulle, l'image $f(G)$ du barycentre G des points M_i affectés des coefficients α_i soit le barycentre des points $f(M_i)$ affectés des coefficients α_i.

Parties convexes. Soit A un espace affine attaché à un espace vectoriel E sur $\mathbf{R}$.

Segment. Soient M et N deux points de A. On appelle segment d'extrémités M et N et on note $[M, N]$ l'ensemble des barycentres de M et N affectés de coefficients positifs.

Partie étoilée. Soient P une partie de A et M un point de P. On dit que P est étoilée par rapport à M si, pour tout point N de P, le segment $[M, N]$ est contenu dans P.

Partie convexe. On dit qu'une partie P de A est convexe si, pour tout couple (M, N) de points de P, le segment $[M, N]$ est contenu dans P. Cela équivaut à dire que P est étoilée par rapport à chacun de ses points.

Pour qu'une partie P de A soit convexe, il faut et il suffit que, pour toute suite finie $(M_1, M_2, \ldots, M_n)$ de points de P et pour toute suite $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de nombres réels positifs non tous nuls, le barycentre des points M_i affectés des coefficients α_i appartienne à P.

3. ESPACES AFFINES DE DIMENSION FINIE

a) Repères affines

Soit A un espace affine attaché à un espace vectoriel E de dimension finie sur K. On appelle repère affine le couple (O, B) constitué d'un point O de A et d'une base $B = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ de E. On appelle coordonnées d'un point M dans le repère (O, B) les composants $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ du vecteur $\boldsymbol{OM}$ dans la base B :

$$\boldsymbol{OM} = \sum_{i=1}^{p} \xi_i \, \boldsymbol{e}_i \, .$$

Changement de repère. Soient (O, B) et (O', B') deux repères affines de A et $P = (\alpha_{ij})$ la matrice de passage de B à B'. Les coordonnées $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ de M dans le repère (O, B) sont liées aux coordonnées $\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_p$ dans le repère (O', B') par la relation

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij} \, \xi'_j + \omega_i \, ,$$

où $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ sont les coordonnées de O' dans le repère (O, B). Inversement,

$$\xi'_i = \sum_{j=1}^{p} \beta_{ij}(\xi_j - \omega_j) \, , \quad \text{où} \quad (\beta_{ij}) = P^{-1} \, .$$

Orientation. Soit A un espace affine attaché à un espace vectoriel E de dimension finie non nulle sur $\mathbf{R}$. Les orientations de E s'appellent encore orientations de A. On appelle espace affine orienté le couple constitué de A et d'une orientation de A.

b) Représentation de sous-espaces affines

Représentation paramétrique d'une droite affine :

$$\xi_i = \lambda \tau_i + \alpha_i \, ,$$

où $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$ sont les composants d'un vecteur directeur et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ les coordonnées d'un point.

Représentation paramétrique d'un plan affine :

$$\xi_i = \lambda\tau_i + \mu\upsilon_i + \alpha_i\,,$$

où $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$ et $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_p$ sont les composants de deux vecteurs directeurs linéairement indépendants et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ les coordonnées d'un point.

Equation cartésienne d'un hyperplan affine :

$$f(\boldsymbol{OM}) = \alpha\,,$$

où f est une forme linéaire non nulle sur E et α un scalaire.

Dans le cas où la dimension de A est 2 ou 3, on obtient l'équation cartésienne d'une droite ou d'un plan :

$$ux + vy = h$$
$$ux + vy + wz = h\,.$$

Intersection de droites et de plans

Cas où la dimension est 2. L'intersection de deux droites affines non parallèles est réduite à un point ; l'intersection de deux droites affines parallèles et distinctes est vide.

Cas où la dimension est 3. L'intersection de deux plans affines non parallèles est une droite affine ; l'intersection de deux plans affines parallèles et distincts est vide.

L'intersection d'une droite affine et d'un plan affine ne contenant pas cette droite est soit réduite à un point, soit vide.

4. ESPACE AFFINE EUCLIDIEN

On appelle espace affine euclidien un espace affine A attaché à un espace vectoriel euclidien E. L'application

$$d : (P, Q) \mapsto \| \boldsymbol{PQ} \|$$

est une distance sur A, dite euclidienne. En particulier, A est un espace métrique.

Les isométries de A constituent un sous-groupe du groupe $\mathbf{GA}(A)$. Les isométries de A ne sont autres que les automorphismes de A dont les endomorphismes associés sont les automorphismes orthogonaux de E.

5. ESPACES AFFINES EUCLIDIENS DE DIMENSION FINIE

Repère orthonormal. Soit A un espace affine euclidien de dimension finie attaché à un espace vectoriel E. On dit qu'un repère (O, B) de A est orthonormal si B est une base orthonormale de l'espace vectoriel euclidien E.

Changement de repère dans un plan euclidien :

$$\begin{cases} x = x' \cos\theta - y' \sin\theta + x_0 \\ y = x' \sin\theta + y' \cos\theta + y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = (x - x_0)\cos\theta + (y - y_0)\sin\theta \\ y' = -(x - x_0)\sin\theta + (y - y_0)\cos\theta . \end{cases}$$

Problèmes métriques dans le plan

Distance d'un point à une droite. Distance d'un point M de coordonnées (x_0, y_0) à une droite D d'équation $ux + vy = h$:

$$d(M, D) = \frac{|ux_0 + vy_0 - h|}{\sqrt{u^2 + v^2}} .$$

Cas où l'équation de la droite est écrite sous la forme eulérienne

$x \cos\theta + y \sin\theta - p = 0$:

$$d(M, D) = |x_0 \cos\theta + y_0 \sin\theta - p| .$$

Bissectrice de deux droites. Soit

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0 \qquad (B^2 > AC)$$

l'équation de l'ensemble de deux droites passant par l'origine ; l'équation de l'ensemble de leurs bissectrices est

$$Bx^2 + (C - A)xy - By^2 = 0 .$$

Cercle. Equation cartésienne :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$
$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0 ,$$

où α et β sont les coordonnées du centre, R le rayon et où $\gamma = \alpha^2 + \beta^2 - R^2$.

Equations paramétriques :

$$x = \alpha + R\cos t \qquad y = \beta + R\sin t\,.$$

Cercles orthogonaux :

$$2(\alpha\alpha' + \beta\beta') = \gamma + \gamma'\,.$$

Représentations polaires d'une droite, d'un cercle, d'une conique. Droite ne passant pas par le pôle :

$$\frac{1}{\rho} = a\cos\theta + b\sin\theta\,.$$

Cercle passant par le pôle :

$$\rho = a\cos\theta + b\sin\theta\,.$$

Conique admettant le pôle pour foyer :

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$$

e excentricité, p paramètre, $(\theta_0, p/(1+e))$ coordonnées polaires de la projection de O sur la directrice associée.

Problèmes métriques dans l'espace de dimension 3

Distance d'un point à un plan. Distance d'un point M de coordonnées (x_0, y_0, z_0) à un plan P d'équation $ux+vy+wz=h$:

$$d(M, P) = \frac{|\,ux_0 + vy_0 + wz_0 - h\,|}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}\,.$$

Distance d'un point à une droite. La distance d'un point M à une droite D définie comme l'intersection de deux plans perpendiculaires P_1 et P_2 est

$$d(M, D) = \sqrt{d(M, P_1)^2 + d(M, P_2)^2}\,.$$

La distance de M à une droite définie par un point N et un vecteur unitaire $\boldsymbol{u}$ est

$$d(M, D) = \|\,\boldsymbol{MN} \times \boldsymbol{u}\,\|\,.$$

Distance de deux droites. Soient D_1 et D_2 deux droites non parallèles définies par des points M_1 et M_2 et des vecteurs unitaires $\boldsymbol{u}_1$ et $\boldsymbol{u}_2$. Alors

$$d(D_1, D_2) = \frac{|\operatorname{Det}(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)|}{\|\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2\|}.$$

Perpendiculaire commune à deux droites. Avec les mêmes notations, les pieds H_1 et H_2 de la perpendiculaire commune à D_1 et D_2 sont définis par

$$\boldsymbol{OH}_1 = \boldsymbol{OM}_1 + \lambda \boldsymbol{u}_1, \qquad \boldsymbol{OH}_2 = \boldsymbol{OM}_2 + \mu \boldsymbol{u}_2$$

et le système linéaire

$$\begin{cases} -\lambda + (\boldsymbol{u}_1.\boldsymbol{u}_2)\,\mu + \boldsymbol{u}_1.\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2 = 0 \\ -(\boldsymbol{u}_1.\boldsymbol{u}_2)\,\lambda + \mu + \boldsymbol{u}_2.\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2 = 0. \end{cases}$$

Exemples de surfaces simples. Soit A un espace affine attaché à un espace vectoriel E.

Cône. Soit S un point de A. On appelle cône de sommet S une surface invariante par les homothéties de centre S.

Un cône a une équation de la forme

$$f(P, Q, R) = 0,$$

où f est une fonction homogène de trois variables et où $P = 0$, $Q = 0$ et $R = 0$ sont les équations de trois plans ayant un point commun et un seul. Réciproquement, toute équation de cette forme représente un cône, dont le sommet est le point d'intersection des trois plans.

Une équation du cône de sommet O contenant la courbe d'équations

$$\begin{cases} g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

s'obtient en éliminant t entre les équations

$$g(tx, ty, tz) = 0 \quad \text{et} \quad h(tx, ty, tz) = 0.$$

Cylindre. Soit D une droite de E. On appelle cylindre de direction D une surface invariante par les translations de vecteur colinéaire à D.

Un cylindre a une équation de la forme

$$f(P, Q) = 0,$$

où $P = 0$ et $Q = 0$ sont les équations de deux plans non parallèles. Réciproquement, toute équation de cette forme représente un cylindre, dont la direction est celle de l'intersection des deux plans.

Une équation du cylindre de direction Oz contenant la courbe d'équations

$$\begin{cases} g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

s'obtient en éliminant z entre ces deux équations.

Conoïde. Soient Π un plan de E et D une droite de A non parallèle à Π. On appelle conoïde d'axe D et de plan directeur Π une surface réunion de droites affines parallèles à Π et rencontrant D. Un conoïde a une équation de la forme

$$f(P, Q, R) = 0 ,$$

où f est une fonction de trois variables homogène par rapport aux deux premières, où $P = 0$, $Q = 0$ et $R = 0$ sont les équations de trois plans ayant un point commun et un seul. Réciproquement, toute équation de cette forme représente un conoïde, dont le plan directeur a pour équation $R = 0$ et dont l'axe a pour équations $P = 0$, $Q = 0$.

On suppose que A est euclidien. On dit qu'un conoïde est droit si D est orthogonale à Π. En coordonnées cylindriques, un conoïde droit a une équation de la forme

$$z = f(\theta) .$$

Par exemple, le conoïde de Plücker admet pour équation

$$z = a \cos 2\theta .$$

Surface de révolution. On suppose que l'espace affine A est euclidien. Soit D une droite de A. On appelle surface de révolution d'axe D une surface invariante par les rotations d'axe D.

Une surface de révolution a une équation de la forme

$$f(S, P) = 0 ,$$

où $S = 0$ est l'équation d'une sphère et où $P = 0$ est l'équation d'un plan. Réciproquement, toute équation de cette forme représente une surface de révolution, dont l'axe est la perpendiculaire au plan passant par le centre de la sphère.

On appelle plans méridiens les plans affines contenant l'axe, méridiennes

les sections de la surface par les plans méridiens et parallèles les cercles sections de la surface par les plans perpendiculaires à l'axe.

Une équation de la surface de révolution d'axe Oz dont la méridienne a pour équations

$$\begin{cases} y = 0 \\ f(x, z) = 0 \end{cases}$$

est, en coordonnées cylindriques,

$$f(\rho, z) = 0 .$$

6. TORSEURS

Champ de vecteurs. Soit A un espace affine attaché à un espace vectoriel euclidien E de dimension 3. On appelle champ de vecteurs une application de A dans E.

On dit qu'un champ de vecteurs V est affine si c'est une application affine de A dans E, E étant considéré comme un espace affine attaché à lui-même.

Les champs de vecteurs affines constituent un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de A dans E.

Champ équiprojectif. On suppose désormais que l'espace vectoriel E est euclidien orienté de dimension 3.

On dit qu'un champ de vecteurs V est équiprojectif si, pour tout couple (P, Q) de points de A,

$$V(P).\boldsymbol{PQ} = V(Q).\boldsymbol{PQ} .$$

Pour qu'un champ de vecteurs V soit équiprojectif, il faut et il suffit qu'il soit affine et que l'endomorphisme u de E associé à V soit antisymétrique.

Les champs équiprojectifs sont encore appelés torseurs ; ils constituent un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications affines de A dans E.

Vecteur et invariant scalaire d'un torseur. Soient $\boldsymbol{T}$ un torseur et u l'endomorphisme antisymétrique associé. Il existe un vecteur $s(\boldsymbol{T})$ et un seul, appelé vecteur du torseur $\boldsymbol{T}$, tel que, pour tout couple (P, Q) de points de A,

$$\boldsymbol{T}(Q) = \boldsymbol{T}(P) + s(\boldsymbol{T}) \times \boldsymbol{PQ} .$$

L'application $s : \boldsymbol{T} \mapsto s(\boldsymbol{T})$ est linéaire.

Pour que deux torseurs soient égaux, il suffit qu'ils aient même vecteur associé et qu'il existe un point de A où ils coïncident.

Pour que deux torseurs soient égaux, il suffit qu'il existe trois points non alignés en lesquels ils coïncident.

Soient $\boldsymbol{T}$ un torseur et M un point de A. Le produit scalaire $\boldsymbol{T}(M).\boldsymbol{s}(\boldsymbol{T})$ est indépendant du point M ; on l'appelle invariant scalaire du torseur $\boldsymbol{T}$ et on le note $h(\boldsymbol{T})$. On dit qu'un torseur est élémentaire si son invariant scalaire est nul.

On dit qu'un torseur est un couple si son vecteur est nul ; cela équivaut à dire que c'est un champ constant.

On dit qu'un torseur est un glisseur s'il s'annule en au moins un point.

Soit $\boldsymbol{T}$ un glisseur non nul. L'ensemble des points de A en lesquels $\boldsymbol{T}$ s'annule est une droite affine, appelée axe du glisseur $\boldsymbol{T}$.

Tout torseur élémentaire est un couple ou un glisseur.

Décomposition d'un torseur. Soient $\boldsymbol{T}$ un torseur et O un point de A. Le torseur $\boldsymbol{T}$ se décompose d'une manière et d'une seule en la somme d'un couple et d'un glisseur dont l'axe passe par O (ou du torseur nul, si $\boldsymbol{T}$ est un couple).

Tout torseur $\boldsymbol{T}$ qui n'est pas un couple se décompose d'une manière et d'une seule en la somme d'un glisseur $\boldsymbol{G}$ et d'un couple $\boldsymbol{C}$ colinéaires (c'est-à-dire que le vecteur constant de $\boldsymbol{C}$ est colinéaire à la direction de l'axe de $\boldsymbol{G}$). On appelle axe de $\boldsymbol{T}$ l'axe de $\boldsymbol{G}$; c'est l'ensemble des points M de A tels que $\boldsymbol{T}(M)$ soit colinéaire à $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{T})$.

Soit O un point de A. L'axe de $\boldsymbol{T}$ est l'ensemble des points

$$O + \frac{1}{\| \boldsymbol{s}(\boldsymbol{T}) \|^2} \boldsymbol{s}(\boldsymbol{T}) \times \boldsymbol{T}(O) + \lambda \boldsymbol{s}(\boldsymbol{T}) . \quad \text{où } \lambda \in \mathbf{R} .$$

La restriction de $\boldsymbol{T}$ à l'axe est constante et égale à

$$\frac{\boldsymbol{T}(O).\boldsymbol{s}(\boldsymbol{T})}{\| \boldsymbol{s}(\boldsymbol{T}) \|^2} \boldsymbol{s}(\boldsymbol{T}) .$$

Comoment de deux torseurs. Soient $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{T}'$ des torseurs. L'application

$$M \mapsto \boldsymbol{s}(\boldsymbol{T}).\boldsymbol{T}'(M) + \boldsymbol{s}(\boldsymbol{T}').\boldsymbol{T}(M)$$

de A dans $\mathbf{R}$ est constante. La valeur de cette application s'appelle comoment des torseurs $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{T}'$, et se note $\mathscr{C}(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}')$. L'application $\mathscr{C}$ est une forme bilinéaire symétrique. L'invariant scalaire de $\boldsymbol{T}$ n'est autre que $\frac{1}{2}\mathscr{C}(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T})$. L'application h est donc une forme quadratique.

Moment d'un torseur par rapport à un axe. Soient Δ un axe et $\boldsymbol{u}$ le vecteur unitaire de Δ. Il existe un glisseur et un seul de vecteur $\boldsymbol{u}$ et d'axe Δ ; on l'appelle glisseur associé à Δ.

Soit $\boldsymbol{T}$ un torseur. On appelle moment de $\boldsymbol{T}$ par rapport à Δ le comoment de $\boldsymbol{T}$ et du glisseur associé à Δ ; ce nombre est égal à $\boldsymbol{T}(M).\boldsymbol{u}$, où M est un point quelconque de Δ.

Coordonnées d'un torseur. Soit (O, B) un repère orthonormal direct de A. On appelle coordonnées d'un torseur $\boldsymbol{T}$ la suite (X, Y, Z, L, M, N) constituée des composants dans la base B de $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{T})$ et de $\boldsymbol{T}(O)$.

Soit P un point de A, de coordonnées x, y, z. Alors $\boldsymbol{T}(P)$ a pour composants

$$\begin{cases} L_P = L - (yZ - zY) \\ M_P = M - (zX - xZ) \\ N_P = N - (xY - yX) . \end{cases}$$

L'invariant scalaire $h(\boldsymbol{T})$ est égal à $LX + MY + NZ$.

Si le torseur $\boldsymbol{T}$ n'est pas un couple, l'axe de $\boldsymbol{T}$ a pour équations

$$\frac{L - (yZ - zY)}{X} = \frac{M - (zX - xZ)}{Y} = \frac{N - (xY - yX)}{Z} .$$

VI. ÉLÉMENTS DE TOPOLOGIE

1. PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DE R

Le corps **R** des nombres réels est un corps commutatif totalement ordonné archimédien contenant le corps **Q** des nombres rationnels et satisfaisant aux conditions suivantes :

a) Les lois et l'ordre de **R** induisent les lois et l'ordre de **Q**.

b) Toute partie majorée (resp. minorée) non vide de **R** a une borne supérieure (resp. inférieure).

Pour tout autre corps K possédant les propriétés précédentes, il existe un isomorphisme du corps ordonné **R** sur le corps ordonné K et un seul laissant fixes tous les éléments de **Q**.

Les intervalles de **R** sont des dix types suivants :

— partie vide	$\varnothing$
— partie pleine	$]-\infty, +\infty[$
— intervalle fermé borné $\{ x \mid a \leqslant x \leqslant b \}$	$[a, b]$
— intervalle ouvert borné $\{ x \mid a < x < b \}$	$]a, b[$
— intervalle semi-ouvert à gauche $\{ x \mid a < x \leqslant b \}$	$]a, b]$
— intervalle semi-ouvert à droite $\{ x \mid a \leqslant x < b \}$	$[a, b[$
— section commençante fermée $\{ x \mid x \leqslant b \}$	$]-\infty, b]$
— section commençante ouverte $\{ x \mid x < b \}$	$]-\infty, b[$
— section finissante fermée $\{ x \mid a \leqslant x \}$	$[a, +\infty[$
— section finissante ouverte $\{x \mid a < x \}$	$]a, +\infty[$.

2. ESPACES MÉTRIQUES

a) Distances

On appelle distance sur un ensemble E une application d de $E \times E$ dans $\mathbf{R}_+$ telle que

$\forall x, y \in E$,	$d(x, y) = d(y, x)$	symétrie
$\forall x, y, z \in E$,	$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$	inégalité triangulaire
$\forall x, y \in E$,	$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$	séparation .

On appelle espace métrique le couple (E, d) constitué d'un ensemble E et d'une distance d sur E.

Pour tout triplet (x, y, z) de points de E,

$$| d(x, z) - d(x, y) | \leqslant d(y, z)$$

(deuxième inégalité triangulaire).

Pour tout quadruplet (x, y, x', y') de points de A,

$$| d(x, y) - d(x', y') | \leqslant d(x, x') + d(y, y')$$

(inégalité du quadrilatère).

On appelle sous-espace métrique de (E, d) le couple (E', d') constitué d'une partie E' de E et de la restriction d' de d à $E' \times E'$.

Boules et sphères. Soient a un point de E et α un nombre réel strictement positif. On appelle boule ouverte de centre a et de rayon α l'ensemble des points x de E tels que $d(a, x) < \alpha$.

Soient a un point de E et α un nombre réel positif. On appelle boule fermée (resp. sphère) de centre a et de rayon α l'ensemble des points x de E tels que $d(a, x) \leqslant \alpha$ (resp. $d(a, x) = \alpha$).

b) Ouverts et fermés

On appelle voisinage d'un point a de E toute partie de E contenant une boule ouverte de centre a. On dit qu'une partie de E est ouverte si elle est un voisinage de chacun de ses points. On dit qu'une partie de E est fermée si son complémentaire est ouvert.

Soient P une partie de E et a un point de E :

— On dit que a est intérieur à P si P est un voisinage de a.
— On dit que a est extérieur à P s'il est intérieur à $\complement_E P$.
— On dit que a est un point frontière de P s'il n'est ni intérieur, ni extérieur à P.
— On dit que a est adhérent à P si tout voisinage de a rencontre P.

Les ensembles des points intérieurs à P, extérieurs à P, frontières de P et adhérents à P s'appellent intérieur, extérieur, frontière et adhérence de P, et se notent $\mathrm{Int}\,(P)$, $\mathrm{Ext}\,(P)$, $\mathrm{Fr}\,(P)$ et $\overline{P}$.

Les parties $\mathrm{Int}\,(P)$, $\mathrm{Ext}\,(P)$ et $\mathrm{Fr}\,(P)$ sont deux à deux disjointes et constituent un recouvrement de E.

$$\mathrm{Ext}\,(P) = \mathrm{Int}\,(\complement_E P) \qquad \mathrm{Fr}\,(P) = \mathrm{Fr}\,(\complement_E P)$$

$$\overline{P} = \mathrm{Int}\,(P) \cup \mathrm{Fr}\,(P) \qquad \mathrm{Int}\,(\mathrm{Int}\,(P)) = \mathrm{Int}\,(P) \qquad \overline{\overline{P}} = \overline{P}$$

P ouverte $\Leftrightarrow P = \text{Int}(P) \Leftrightarrow P \cap \text{Fr}(P) = \varnothing$

P fermée $\Leftrightarrow P = \overline{P} \Leftrightarrow \text{Fr}(P) \subset P$.

c) **Suites de points d'un espace métrique**

On dit qu'une suite (u_n) de points de E est convergente s'il existe un élément a de E tel que, pour tout voisinage V de a, il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier n supérieur à n_0, u_n appartienne à V, ou encore :

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbf{N} : \quad \forall n \geqslant n_0, \quad d(a, u_n) \leqslant \varepsilon .$$

Un tel élément a est unique ; on l'appelle limite de la suite (u_n) et on le note $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

On dit qu'une suite (u_n) de points de E est une suite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbf{N} : \forall p \geqslant n_0, \forall q \geqslant n_0, \quad d(u_p, u_q) \leqslant \varepsilon .$$

Toute suite convergente est une suite de Cauchy ; lorsque la réciproque est vraie, on dit que l'espace métrique (E, d) est complet.

On dit que (E, d) est compact si, de tout recouvrement ouvert de E, on peut extraire un recouvrement fini (propriété de Borel-Lebesgue). Cela équivaut à dire que, de toute suite de points de E, on peut extraire une suite convergente (propriété de Bolzano-Weierstrass).

On dit que (E, d) est précompact si, pour tout nombre réel $\alpha > 0$, E peut être recouvert par un ensemble fini de boules de rayon α.

(E, d) compact $\Leftrightarrow$ (E, d) précompact et complet .

On dit qu'une partie E' de E est complète (resp. compacte) si (E', d') est complet (resp. compact). Toute partie complète (resp. compacte) est fermée ; la réciproque est vraie si (E, d) est complet (resp. compact).

3. ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Soit E un espace vectoriel sur K, où K désigne le corps des réels ou le corps des complexes. On appelle norme sur E une application, notée $\boldsymbol{x} \mapsto \| \boldsymbol{x} \|$, de E dans $\mathbf{R}_+$ telle que

$\forall \boldsymbol{x} \in E, \forall \alpha \in K, \quad \| \alpha \boldsymbol{x} \| = \lvert \alpha \rvert \, \| \boldsymbol{x} \|$	homogénéité
$\forall \boldsymbol{x} \in E, \forall \boldsymbol{y} \in E, \quad \| \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \| \leqslant \| \boldsymbol{x} \| + \| \boldsymbol{y} \|$	inégalité triangulaire
$\forall \boldsymbol{x} \in E, \quad \| \boldsymbol{x} \| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$	séparation .

(Si seules les deux premières conditions sont satisfaites, on dit que l'application $x \mapsto \| x \|$ est une semi-norme.)

On appelle espace vectoriel normé le couple constitué d'un espace vectoriel E sur K et d'une norme sur E.

Distance associée à une norme. L'application $d : (x, y) \mapsto \| x - y \|$ est une distance sur E, possédant les deux propriétés suivantes :

$\forall x \in E, \forall y \in E, \forall \alpha \in K, \quad d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| \, d(x, y)$ homogénéité

$\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E, \quad d(x+z, y+z) = d(x, y)$ invariance par translation.

Espaces vectoriels normés de dimension finie. Soit P une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie.

P complète $\Leftrightarrow$ P fermée

P compacte $\Leftrightarrow$ P fermée bornée.

Normes classiques. Soit n un entier naturel non nul. L'application N_∞ de K^n dans $\mathbf{R}_+$ définie par la relation

$$N_\infty(x) = \sup_{i \in [1,n]} |\xi_i|$$

est une norme. Le nombre $N_\infty(x)$ se note encore $\| x \|_\infty$.

Pour tout nombre réel $p \geqslant 1$, l'application N_p de K^n dans $\mathbf{R}_+$ définie par la relation

$$N_p(x) = \left(\sum_{i=1}^{p} |\xi_i|^p \right)^{1/p}$$

est une norme. Le nombre $N_p(x)$ se note encore $\| x \|_p$. Ainsi,

$$\| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| \qquad \| x \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2}.$$

4. APPLICATIONS D'UN ESPACE MÉTRIQUE DANS UN AUTRE

a) Limites, continuité

Limite. Soient (E, d) et (F, d') deux espaces métriques, f une application définie sur une partie A de E à valeurs dans F, P une partie de A

et x_0 un point de E adhérent à P. On dit que $f(x)$ admet une limite lorsque x tend vers x_0 en restant dans P s'il existe un élément a de F tel que

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^* : \forall x \in P, \qquad d(x, x_0) \leqslant \eta \Rightarrow d'(f(x), a) \leqslant \varepsilon .$$

Un tel élément a est unique ; on l'appelle limite de $f(x)$ lorsque x tend vers x_0 en restant dans P, et on le note $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in P}} f(x)$.

On dit que $f(x)$ admet une limite au point x_0 si $f(x)$ admet une limite lorsque x tend vers x_0 en restant dans A.

Critère de Cauchy. Lorsque l'espace métrique (F, d') est complet, une condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$ ait une limite lorsque x tend vers x_0 en restant dans P est que

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^* : \forall x, y \in P, \qquad d(x, x_0) \leqslant \eta \text{ et } d(y, x_0) \leqslant \eta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon.$$

Continuité. Soit x_0 un point de A. On dit que f est continue au point x_0 si $f(x)$ a une limite en ce point ; cette limite est alors égale à $f(x_0)$.

On dit qu'une application f de E dans F est continue sur E si elle est continue en tout point de E.

Pour que f soit continue sur E, il faut et il suffit que, pour toute partie ouverte U de F, $f^{-1}(U)$ soit une partie ouverte de E, ou encore que, pour toute partie fermée T de F, $f^{-1}(T)$ soit une partie fermée de E.

Si f est continue, l'image par f de toute partie compacte de E est une partie compacte de F.

Composée de deux applications continues. Soient (E, d), (F, d') et (G, d'') trois espaces métriques, f une application de E dans F et g une application de F dans G. Si f et g sont continues, il en est de même de $g \circ f$.

Continuité uniforme. Soient (E, d) et (F, d') deux espaces métriques. On dit qu'une application f de E dans F est uniformément continue sur E si

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^* : \forall x \in E, \forall y \in E, \quad d(x, y) \leqslant \eta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon .$$

Toute application uniformément continue est continue ; la réciproque est vraie si (E, d) est compact (th. de Heine).

Composée de deux applications uniformément continues. Soient (E, d), (F, d') et (G, d'') trois espaces métriques, f une application de E dans F et g une application de F dans G. Si f et g sont uniformément continues, il en est de même de $g \circ f$.

Isométries, applications lipschitziennes. On dit qu'une application f de E dans F est une isométrie si elle est bijective et si

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad d'(f(x), f(y)) = d(x, y).$$

On dit qu'une application f de E dans F est lipschitzienne s'il existe un nombre réel positif β tel que,

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad d'(f(x), f(y)) \leqslant \beta d(x, y).$$

On dit alors que f est β-lipschitzienne, ou lipschitzienne dans le rapport β.

Si E est non vide, on appelle rapport de Lipschitz de f la borne inférieure $\lambda(f)$ des nombres réels β satisfaisant à la condition ci-dessus. L'application f est lipschitzienne dans le rapport $\lambda(f)$.

$$\lambda(f) = \sup_{x \neq y} \frac{d'(f(x), f(y))}{d(x, y)}.$$

Soit par exemple f une fonction numérique de classe C^1 sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbf{R}$. Alors f est lipschitzienne et

$$\lambda(f) = \sup_{x \in [a,b]} | f'(x) |.$$

Les applications lipschitziennes sont uniformément continues.

Théorème du point fixe. Soient (E, d) un espace métrique complet et f une application lipschitzienne de E dans lui-même. On suppose que la série de terme général $(\lambda(f^n))$ est convergente (ce qui est réalisé lorsque $\lambda(f) < 1$). Il existe alors un point a de E et un seul tel que $f(a) = a$. Pour tout point x_0 de E, la suite (x_n) définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a et, pour tout entier naturel non nul n,

$$d(x_n, a) \leqslant \left(\sum_{p=n}^{+\infty} \lambda(f^n) \right) d(x_1, x_0).$$

Distances équivalentes. Soient E un ensemble, d et d' des distances sur E. On dit que d et d' sont topologiquement équivalentes si elles définissent les mêmes ouverts. Cela revient à dire que I_E est une application continue de (E, d) sur (E, d'), et de (E, d') sur (E, d). On dit que d et d' sont uniformément équivalentes si I_E est une application uniformément continue de (E, d) sur (E, d'), et de (E, d') sur (E, d). On dit que d et d' sont métriquement équivalentes si I_E est une application lipschitizienne de (E, d) sur (E, d'), et de (E, d') sur (E, d).

b) Cas des espaces vectoriels normés

Continuité d'une application linéaire. Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur K et u une application linéaire de E dans F. Pour que u soit continue sur E, il faut et il suffit qu'il existe un nombre réel strictement positif β tel que

$$\forall x \in E, \qquad \| u(x) \| \leqslant \beta \| x \| .$$

Dans ces conditions, u est β-lipschitzienne (et donc uniformément continue).

Si l'espace vectoriel E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.

Continuité d'une forme linéaire. Soient E un espace vectoriel normé sur K et f une forme linéaire sur E. Pour que f soit continue, il faut et il suffit que son noyau soit fermé.

Normes équivalentes

On dit que deux normes $x \mapsto \| x \|'$ et $x \mapsto \| x \|''$ sur E sont équivalentes si les distances associées sont topologiquement équivalentes. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que ces distances soient métriquement équivalentes, ou encore qu'il existe deux nombres réels strictement positifs α et β tels que $\forall x \in E$, $\alpha \| x \|'' \leqslant \| x \|' \leqslant \beta \| x \|''$.

Si l'espace vectoriel E est de dimension finie, toutes les normes sur E sont deux à deux équivalentes.

Norme d'une application linéaire. Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur K. L'ensemble des applications linéaires continues de E dans F est un sous-espace vectoriel, noté $\mathscr{LC}(E, F)$, de l'espace vectoriel $\mathscr{L}(E, F)$.

Sur l'espace vectoriel $\mathscr{LC}(E, F)$, l'application

$$u \mapsto \| u \| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \| u(x) \|$$

est une norme. L'espace vectoriel normé $\mathscr{LC}(E, F)$ est complet si et seulement si l'espace vectoriel normé F l'est.

$$\forall x \in E, \qquad \| u(x) \| \leqslant \| u \| \| x \| .$$

Soit G un troisième espace vectoriel normé sur K. Pour toute application linéaire continue v de F dans G, l'application $v \circ u$ est linéaire continue, et

$$\| v \circ u \| \leqslant \| v \| \| u \| .$$

Enfin, $\| I_E \| = 1$.

VII. FONCTIONS NUMÉRIQUES OU VECTORIELLES D'UNE VARIABLE RÉELLE

1. FONCTIONS NUMÉRIQUES D'UNE VARIABLE RÉELLE

a) Propriétés d'une fonction continue sur un intervalle

Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle I de $\mathbf{R}$. L'image $f(I)$ de I par f est encore un intervalle de $\mathbf{R}$.

Propriétés d'une fonction continue sur un fermé borné. Soit f une fonction continue sur une partie fermée bornée P de $\mathbf{R}$. L'image $f(P)$ de P par f est encore une partie fermée bornée de $\mathbf{R}$, et la fonction f est uniformément continue sur P.

b) Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbf{R}$. Pour que f admette une fonction réciproque définie sur $f(I)$, il faut et il suffit que f soit strictement monotone. Dans ces conditions, f^{-1} est continue et strictement monotone sur $f(I)$.

c) Dérivabilité

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ non réduit à un point.

On dit que f est dérivable en un point x_0 de I si la fonction

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

a une limite en ce point ; cette limite est appelée dérivée de f au point x_0 et notée $f'(x_0)$.

On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I. La fonction numérique $x \mapsto f'(x)$ est appelée dérivée de f et notée f', ou encore Df.

Opérations algébriques sur les fonctions dérivables. Les fonctions numériques définies sur I dérivables au point x_0 constituent une sous-algèbre pleine de l'algèbre des fonctions numériques définies sur I, et l'application $f \mapsto f'(x_0)$ est une forme linéaire.

De même, les fonctions dérivables sur I constituent une sous-algèbre pleine de l'algèbre des fonctions définies sur I.

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g', \quad (fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = f' \frac{1}{g} - f \frac{g'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$(f_1 f_2 \cdots f_n)' = \sum_{i=1}^{n} f_1 f_2 \cdots f_{i-1} f_i' f_{i+1} \cdots f_n$$

$$(f^n)' = n f^{n-1} f' \begin{cases} n \in \mathbf{N} \\ n \in \mathbf{Z}, \text{ si } f \text{ ne s'annule pas} . \end{cases}$$

Dérivabilité d'une fonction composée. Soient f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, et g une fonction numérique définie sur un intervalle J de $\mathbf{R}$ contenant $f(I)$. Si f est dérivable en un point x_0 de I, et si g est dérivable au point $f(x_0)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable au point x_0, et

$$(g \circ f)'(x_0) = g'[f(x_0)] . f'(x_0) .$$

Si f est dérivable sur I et si g est dérivable sur $f(I)$, alors $g \circ f$ est dérivable sur I, et

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) . f' .$$

Dérivabilité d'une fonction réciproque. Soient f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, J l'image de I par f, g la fonction réciproque de f, et x_0 un point de I. Lorsque f est dérivable au point x_0, g est dérivable au point $y_0 = f(x_0)$ si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$. Dans ces conditions,

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} .$$

Par suite, lorsque f est dérivable sur I, g est dérivable sur J si et seulement si f' ne s'annule en aucun point de I, et

$$g' = \frac{1}{f' \circ g} .$$

Dérivée logarithmique. Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, ne s'annulant pas sur I. On appelle dérivée logarithmique de f le quotient de f' par f.

Soient $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ une suite de p fonctions numériques dérivables sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, ne s'annulant pas sur I, et $(n_1, n_2, \ldots, n_p)$ une suite de p entiers rationnels. Alors

$$\frac{(f_1^{n_1} f_2^{n_2} \cdots f_p^{n_p})'}{f_1^{n_1} f_2^{n_2} \cdots f_p^{n_p}} = n_1 \frac{f_1'}{f_1} + n_2 \frac{f_2'}{f_2} + \cdots + n_p \frac{f_p'}{f_p}.$$

Dérivées successives. Soient E_0 l'ensemble des fonctions numériques définies sur I et D^0 l'application identique de E_0. Pour tout entier naturel non nul r, on définit par récurrence sur r le couple (E_r, D^r) constitué de l'ensemble E_r des fonctions numériques définies sur I telles que $D^{r-1} f$ soit dérivable sur I et de l'application D^r de E_r dans E_0 qui à tout élément f associe $(D^{r-1} f)'$. Les éléments de E_r s'appellent fonctions r fois dérivables sur I. La fonction $D^r f$ s'appelle dérivée r-ième de f et se note encore $f^{(r)}$.

Pour tout entier naturel r, E_r est une sous-algèbre pleine de l'algèbre unitaire E_0. De plus, pour tout couple (f, g) de fonctions r fois dérivables sur I,

$$(fg)^{(r)} = fg^{(r)} + C_r^1 f' g^{(r-1)} + \cdots + C_r^s f^{(s)} g^{(r-s)} + \cdots + f^{(r)} g$$

(formule de Leibniz).

On dit qu'une fonction numérique f est indéfiniment dérivable sur I si, pour tout entier naturel non nul r, f est r fois dérivable sur I. L'ensemble E_∞ des fonctions indéfiniment dérivables sur I est une sous-algèbre pleine de E_0 ; plus précisément,

$$E_\infty = \bigcap_{r=0}^{+\infty} E_r.$$

L'application $D : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel sous-jacent.

Fonctions de classe C^r. Soit r un entier naturel non nul. On dit qu'une fonction numérique f définie sur I est de classe C^r si elle est r fois dérivable et si $D^r f$ est continue sur I.

On dit qu'une fonction est de classe C^0 si elle est continue sur I, de classe C^∞ si elle est indéfiniment dérivable sur I.

d) Théorème de Rolle

Soient f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ et x_0 un point de I. On dit que f admet un maximum au point x_0 si, pour tout

point x de I, $f(x) \leqslant f(x_0)$. On dit que f admet un maximum local au point x_0 s'il existe un voisinage V de x_0 tel que la restriction de f à $I \cap V$ admette un maximum au point x_0. On dit que f admet un minimum, ou un minimum local, au point x_0 si $-f$ admet un maximum, ou un maximum local, en ce point.

Soient f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, et x_0 un point intérieur à I. Si la fonction f admet un maximum ou un minimum local au point x_0, et si f est dérivable en ce point, alors

$$f'(x_0) = 0 .$$

Théorème de Rolle. Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbf{R}$, dérivable sur l'intervalle $]a, b[$, et telle que

$$f(a) = f(b) .$$

Il existe alors au moins un point c de l'intervalle $]a, b[$ tel que

$$f'(c) = 0 .$$

Théorème des accroissements finis. Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbf{R}$, et dérivable sur l'intervalle $]a, b[$. Il existe alors au moins un point c de l'intervalle $]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

Théorème de Taylor-Lagrange. Soient n un entier naturel et f une fonction numérique n fois continûment dérivable sur un intervalle $[a, b]$ et $n + 1$ fois dérivable sur $]a, b[$. Il existe alors au moins un point c de l'intervalle $]a, b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1\,!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2\,!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n\,!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)\,!}(b-a)^{n+1} .$$

Sens de variation d'une fonction. Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle I.

Si la dérivée de f est nulle, f est constante.

Si la dérivée de f est positive, f est croissante.

Si la dérivée de f est négative, f est décroissante.

Primitives. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$. On dit qu'une fonction numérique g définie sur I est une primitive de f sur cet intervalle si g est dérivable sur I, sa dérivée étant égale à f.

Pour tout nombre réel a, la fonction $g + a$ est encore une primitive de f.

Réciproquement, pour toute primitive h de f, il existe un nombre réel b tel que $h = g + b$. Autrement dit, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Plus précisément, soient x_0 un point de I et y_0 un nombre réel. Il existe une primitive h de f et une seule telle que $h(x_0) = y_0$.

e) Étude locale d'une fonction

Comparaison des fonctions. Soient f et g deux fonctions numériques définies sur une partie P de $\mathbf{R}$ et x_0 un point de $\mathbf{R}$ adhérent à P.

On dit que f est dominée par g au voisinage de x_0, et on note $f = O(g)$, s'il existe un voisinage V de x_0 et un nombre réel positif β tels que, pour tout point x de $V \cap P$,

$$| f(x) | \leqslant \beta | g(x) | .$$

On dit que f est semblable à g au voisinage de x_0, et on note $f \asymp g$, si

$$f = O(g) \quad \text{et} \quad g = O(f) .$$

On dit que f est négligeable devant g (ou que g est prépondérante sur f) au voisinage de x_0, et on note $f = o(g)$, si, pour tout nombre réel strictement positif ε, il existe un voisinage V de x_0 tel que, pour tout point x de $V \cap P$,

$$| f(x) | \leqslant \varepsilon | g(x) | .$$

On dit que f est équivalente à g au voisinage de x_0, et on note $f \sim g$, si

$$f - g = o(g) .$$

Les relations de similitude et d'équivalence entre fonctions sont des relations d'équivalence, compatibles avec la multiplication mais non avec l'addition.

Les énoncés précédents se transcrivent aux cas où $x_0 = + \infty$ et où $x_0 = - \infty$; le cas particulier où $P = \mathbf{N}$ et où $x_0 = + \infty$ est celui des suites.

Exemples fondamentaux. Au voisinage de 0,

$$\operatorname{sh} x \sim x \qquad \sin x \sim x$$
$$\operatorname{th} x \sim x \qquad \tan x \sim x$$
$$\operatorname{Arg\,sh} x \sim x \qquad \operatorname{Arc\,sin} x \sim x$$
$$\operatorname{Arg\,th} x \sim x \qquad \operatorname{Arc\,tan} x \sim x$$
$$\operatorname{ch} x - 1 \sim \frac{x^2}{2} \qquad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$
$$\operatorname{Arg\,ch}(1 + x) \sim \sqrt{2x} \qquad \operatorname{Arc\,cos}(1 - x) \sim \sqrt{2x} \quad \text{si} \quad x \geqslant 0$$
$$\ln(1 + x) \sim x \qquad e^x - 1 \sim x\,.$$

Développements limités. Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, x_0 un point de I et n un entier naturel. On dit qu'une fonction numérique f définie sur I admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 s'il existe une fonction polynomiale A de degré inférieur à n telle que $f(x) - A(x)$ soit négligeable devant $(x - x_0)^n$ au voisinage de x_0 ; une telle fonction A s'appelle développement limité de f à l'ordre n au voisinage de x_0.

L'ensemble $\mathscr{D}_n(I)$ des fonctions admettant un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur I.

L'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur à n et l'ensemble des fonctions négligeables devant $(x - x_0)^n$ au voisinage de x_0 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathscr{D}_n(I)$. En particulier, le développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 est unique, et l'application P_n qui à tout élément de $\mathscr{D}_n(I)$ associe son développement limité est un projecteur :

$$P_n(\alpha f + \beta g) = \alpha P_n(f) + \beta P_n(g)\,.$$

Pour tout couple (n, p) d'entiers naturels tel que $p < n$, $\mathscr{D}_n(I)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{D}_p(I)$, et, pour tout élément f de $\mathscr{D}_n(I)$,

$$P_p(f) = P_p[P_n(f)]\,.$$

L'ensemble $\mathscr{D}_n(I)$ est une sous-algèbre pleine de l'algèbre des fonctions numériques définies sur I. Plus précisément,

$$P_n(fg) = P_n[P_n(f)\,P_n(g)]\,.$$

Si g ne s'annule pas sur I, le développement limité de f/g est le quotient de

la division de $P_n(f)$ par $P_n(g)$ suivant les puissances croissantes de $x - x_0$ à l'ordre n.

Soient f une fonction admettant un développement limité A à l'ordre n au voisinage de x_0 telle que $f(x_0) = 0$, et g une fonction admettant un développement limité B à l'ordre n au voisinage de 0. Alors $g \circ f$ admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0, et

$$P_n(g \circ f) = P_n(B \circ A).$$

Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I contenant 0, admettant un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, $n > 0$, et telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Alors f^{-1} admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0. De plus, les coefficients du développement limité de f^{-1} s'obtiennent en identifiant le développement limité à l'ordre n de la fonction composée $f^{-1} \circ f$ à la fonction $x \mapsto x$.

Existence de développements limités. Pour que f admette un développement limité à l'ordre 0 au voisinage de x_0, il faut et il suffit que f soit continue en ce point.

Pour que f admette un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de x_0, il faut et il suffit que f soit dérivable en ce point.

Pour que f admette un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0, il suffit que f soit $n - 1$ fois dérivable sur un voisinage de x_0 et que $f^{(n-1)}$ soit dérivable en ce point. Dans ce cas,

$$P_n(f)(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

(formule de Taylor-Young).

f) Fonction convexe

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$. On dit que f est convexe si l'ensemble des points (x, y) de $I \times \mathbf{R}$ tels que $y \geqslant f(x)$ est convexe. Cela équivaut à dire que, pour tout couple (x, x') de points de I et pour tout nombre réel α appartenant à $[0, 1]$,

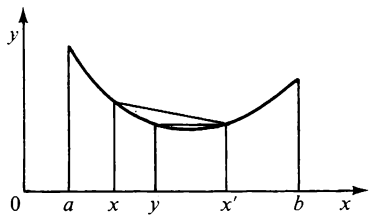
$$f(\alpha x + (1 - \alpha) x') \leqslant \alpha f(x) + (1 - \alpha) f(x').$$

Dans ces conditions, pour toute suite $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de points de I et pour toute suite $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de nombres réels positifs de somme égale à 1,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i).$$

Pour tout triplet (x, x', y) de points de I tel que $x < y < x'$,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \leqslant \frac{f(x') - f(y)}{x' - y}.$$



Si l'intervalle I est ouvert, f est continue sur I, et dérivable à gauche et à droite en tout point de I; les fonctions f'_g et f'_d sont croissantes.

Pour qu'une fonction f dérivable sur I soit convexe, il faut et il suffit que f' soit croissante; pour qu'une fonction f deux fois dérivable sur I soit convexe, il faut et il suffit que f'' soit positive.

2. INTÉGRALE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE D'UNE VARIABLE RÉELLE

a) Fonction intégrable, au sens de Riemann, sur un segment

Subdivision d'un intervalle. Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. On appelle subdivision de l'intervalle $[a, b]$ toute suite finie strictement croissante $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de nombres réels telle que $x_0 = a$, $x_n = b$.

On appelle pas de la subdivision $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ le plus grand des nombres $x_i - x_{i-1}$, où $i \in [1, n]$.

Somme de Riemann. Soient f une fonction numérique définie et bornée sur un intervalle fermé borné $[a, b]$, $a < b$, et $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une subdivision de $[a, b]$. On appelle somme de Riemann associée à f relativement à cette subdivision toute somme

$$R = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i),$$

où, pour tout élément i de $[1, n]$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Fonction intégrable. Soit f une fonction numérique définie et bornée sur un intervalle fermé borné $[a, b]$, $a < b$. On dit que f est intégrable sur

cet intervalle s'il existe un nombre réel α tel que, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\eta > 0$ tel que, pour toute subdivision $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de pas inférieur à η, et pour toute somme de Riemann R associée à f relativement à cette subdivision, $| R - \alpha | \leqslant \varepsilon$.

Un tel nombre α est unique ; on l'appelle intégrale de f de a à b, et on le note

$$\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t .$$

Les nombres a et b s'appellent respectivement borne inférieure et borne supérieure de l'intégrale de f.

Les fonctions continues, les fonctions monotones sont intégrables.

Soit f une fonction intégrable ; alors $| f |$ est intégrable, et

$$\left| \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b | f(t) |\, \mathrm{d}t .$$

b) Propriétés des fonctions numériques intégrables

Les fonctions bornées et intégrables sur $[a, b]$ constituent une sous-algèbre pleine de l'algèbre unitaire des fonctions numériques bornées sur $[a, b]$. L'application

$$f \mapsto \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$$

est une forme linéaire croissante ; sa restriction au sous-espace vectoriel des fonctions continues sur $[a, b]$ est strictement croissante.

Inégalité de Schwarz. L'application $(f, g) \mapsto \int_a^b f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$ est une forme bilinéaire symétrique sur l'espace vectoriel des fonctions intégrables sur $[a, b]$, dont la forme quadratique associée est positive. L'inégalité de Schwarz s'écrit

$$\left(\int_a^b f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t \right)^2 \leqslant \int_a^b f(t)^2\, \mathrm{d}t \int_a^b g(t)^2\, \mathrm{d}t .$$

La restriction de cette forme bilinéaire au sous-espace vectoriel des fonctions continues sur $[a, b]$ est non dégénérée ; l'application

$$f \mapsto \sqrt{\int_a^b f(t)^2 \, dt}$$

est une norme sur l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a, b]$.

Première formule de la moyenne. Soient f et g deux fonctions numériques bornées et intégrables sur un intervalle fermé borné $[a, b]$, $a < b$. Soit (m, M) un couple de nombres réels tel que

$$m \leqslant f \leqslant M .$$

Alors, si g est positive,

$$m \int_a^b g(t) \, dt \leqslant \int_a^b f(t) \, g(t) \, dt \leqslant M \int_a^b g(t) \, dt .$$

En particulier, si $g = 1$,

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(t) \, dt \leqslant M(b - a) .$$

Plus particulièrement encore, si f est continue, il existe un point c de l'intervalle $]a, b[$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(t) \, dt .$$

Valeur moyenne d'une fonction. Soit f une fonction intégrable sur un intervalle $[a, b]$. Alors

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k \frac{b - a}{n}\right) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(t) \, dt$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n + 1} \sum_{k=0}^{n} f\left(a + k \frac{b - a}{n}\right) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(t) \, dt .$$

Le nombre $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$ s'appelle valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$.

c) Intégrale sur la réunion de deux segments adjacents

Soient a, b et c trois nombres réels tels que $a < b < c$ et f une fonction numérique bornée sur $[a, c]$. Pour que f soit intégrable sur $[a, c]$, il faut et il suffit qu'elle le soit sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$. Dans ces conditions,

$$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt .$$

d) Changement de variable, intégration par parties

Soient φ une fonction numérique continûment dérivable sur un intervalle fermé borné $[a, b]$, et f une fonction numérique continue sur un intervalle I contenant l'image de $[a, b]$ par φ. Alors

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(t).\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du .$$

Soient f et g deux fonctions numériques continûment dérivables sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b f(x).g'(x)\,dx = [f(x).g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x).g(x)\,dx .$$

e) Intégrale considérée comme fonction de sa borne supérieure

Soit f une fonction numérique définie, bornée et intégrable sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbf{R}$. Alors, pour tout point x de $[a, b]$, f est intégrable sur l'intervalle $[a, x]$. La fonction

$$g : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

est donc définie sur $[a, b]$.

La fonction g est continue sur $[a, b]$.

Si f est positive, g est croissante. Si f est négative, g est décroissante.

Si f est continue en un point x_0 de $[a, b]$, g est dérivable en ce point, et

$$g'(x_0) = f(x_0) .$$

Cas d'une fonction continue. Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle I de $\mathbf{R}$.

La fonction f admet une primitive sur I. Plus précisément, soit x_0 un point de I; l'unique primitive de f s'annulant en ce point est

$$x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\, \mathrm{d}t .$$

Soient x_0 et x_1 deux points de I, et h une primitive de f. Alors

$$\int_{x_0}^{x_1} f(t)\, \mathrm{d}t = h(x_1) - h(x_0) .$$

f) Intégrale d'une fonction sur un intervalle non borné, sur un intervalle borné ouvert

Définition des intégrales convergentes. Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ de la forme $[a, b[$, où b est un nombre réel ou $+\infty$, et f une fonction numérique définie sur I, bornée et intégrable sur tout intervalle fermé borné contenu dans I. Soit g la fonction numérique définie sur I par

$$g(x) = \int_{a}^{x} f(t)\, \mathrm{d}t .$$

On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente si $g(x)$ admet une limite lorsque x tend vers b ; cette limite se note $\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$. Sinon on dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est divergente.

Le cas où I est de la forme $]a, b]$ est analogue.

Soient enfin I un intervalle de $\mathbf{R}$ de la forme $]a, b[$, où a est un nombre réel ou $-\infty$ et b un nombre réel ou $+\infty$, et f une fonction numérique définie sur I, bornée et intégrable sur tout intervalle fermé borné contenu dans I. On dit que l'intégrale de f sur $]a, b[$ est convergente s'il existe un point c de $]a, b[$ tel que les intégrales de f sur $]a, c]$ et sur $[c, b[$ soient conver-

gentes. Alors, pour tout point c' de $]a, b[$, les intégrales de f sur $]a, c']$ et sur $[c', b[$ sont convergentes, et

$$\int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt = \int_a^{c'} f(t)\,dt + \int_{c'}^b f(t)\,dt .$$

La valeur commune des deux membres se note $\int_a^b f(t)\,dt$.

Convergence des intégrales de fonctions positives. Soit f une fonction positive sur un intervalle de la forme $[a, b[$, bornée et intégrable sur tout intervalle fermé borné contenu dans $[a, b[$. Pour que l'intégrale de f sur $[a, b[$ converge, il faut et il suffit que la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ soit majorée.

Intégrales de Riemann. Soient a un nombre réel strictement positif et α un nombre réel. Pour que l'intégrale de $x \mapsto 1/x^\alpha$ sur $[a, +\infty[$ soit convergente, il faut et il suffit que α soit strictement supérieur à 1.

Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$. Pour que l'intégrale de $x \mapsto \dfrac{1}{(b-x)^\alpha}$ sur $[a, b[$ soit convergente, il faut et il suffit que $\alpha < 1$.

Intégrales de Bertrand. Soient a un nombre réel strictement supérieur à 1, α et β des nombres réels. Pour que l'intégrale de $x \mapsto \dfrac{1}{x^\beta(\ln x)^\alpha}$ sur $[a, +\infty[$ converge, il faut et il suffit que $\beta > 1$ ou ($\beta = 1$ et $\alpha > 1$).

Soit b un nombre réel appartenant à $]0, 1[$. Pour que l'intégrale de $x \mapsto \dfrac{1}{x^\beta\,|\ln x\,|^\alpha}$ sur $]0, b[$ converge, il faut et il suffit que $\beta < 1$ ou ($\beta = 1$ et $\alpha < 1$).

Comparaison des fonctions positives intégrables. Soient f_1 et f_2 deux fonctions positives définies sur $[a, b[$, bornées et intégrables sur tout intervalle fermé borné contenu dans $[a, b[$.

Si f_1 est dominée par f_2 au voisinage de b et si l'intégrale de f_2 sur $[a, b[$ est convergente, l'intégrale de f_1 sur $[a, b[$ est convergente.

Si f_1 et f_2 sont semblables au voisinage de b, la convergence de l'intégrale de f_1 sur $[a, b[$ équivaut à celle de f_2.

Règle de Riemann. Soit f une fonction positive définie sur $[a, +\infty[$, bornée et intégrable sur tout intervalle fermé borné contenu dans $[a, +\infty[$.

On suppose qu'il existe un nombre réel α tel que $x^\alpha f(x)$ ait une limite β appartenant à $[0, +\infty]$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Si $\alpha > 1$ et si β est fini, l'intégrale de f sur $[a, +\infty[$ est convergente.

Si $\alpha \leqslant 1$ et si $\beta \neq 0$, l'intégrale de f sur $[a, +\infty[$ est divergente.

Dans le cas d'un intervalle de la forme $]0, b]$, les conditions sur α deviennent $\alpha < 1$ et $\alpha \geqslant 1$.

Convergence absolue. Soit f une fonction numérique définie sur $[a, b[$, bornée et intégrable sur tout intervalle fermé borné contenu dans $[a, b[$. On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est absolument convergente si l'intégrale de $|f|$ sur $[a, b[$ est convergente. Dans ce cas, l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente et

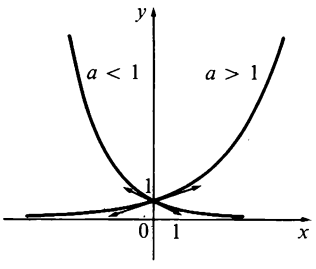
$$\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt .$$

On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est semi-convergente si elle est convergente sans être absolument convergente.

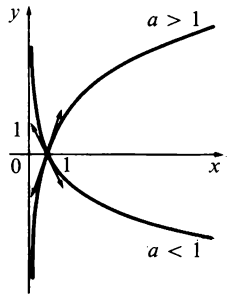
3. FONCTIONS USUELLES ET APPLICATIONS

a) Fonctions usuelles

Fonctions logarithmiques et exponentielles. Soit a un nombre réel strictement positif. Il existe un morphisme monotone et un seul du groupe additif $\mathbf{R}$ dans le groupe multiplicatif $\mathbf{R}_+^*$, appelé exponentielle de base a et noté $\exp_a$, tel que $\exp_a(1) = a$.



Exponentielle de base a.



Logarithme de base a.

Lorsque $a \neq 1$, la fonction $\exp_a$ est un isomorphisme de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}_+^*$, croissant si $a > 1$ et décroissant si $a < 1$.

La fonction exponentielle de base 1 est constante et égale à 1.

La restriction à $\mathbf{Z}$ de $\exp_a$ coïncidant avec $n \mapsto a^n$, la fonction exponentielle de base a se note encore $x \mapsto a^x$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$(ab)^x = a^x b^x .$$

La fonction $\exp_a$ est dérivable sur $\mathbf{R}$, et

$$(\exp_a)' = \exp_a'(0).\exp_a .$$

Il existe un nombre réel a et un seul, appelé nombre de Neper et noté e, tel que $\exp_a'(0) = 1$.

$$e = 2{,}718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360...$$

Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1. La fonction réciproque de $\exp_a$ est un isomorphisme monotone de $\mathbf{R}_+^*$ sur $\mathbf{R}$, appelé logarithme de base a et noté $\log_a$.

La fonction $\log_e$ s'appelle logarithme népérien et se note log ou ln ; elle est dérivable sur $]0, +\infty[$, et sa dérivée est la fonction $x \mapsto 1/x$.

Pour tout couple (a, b) de nombres réels strictement positifs et différents de 1,

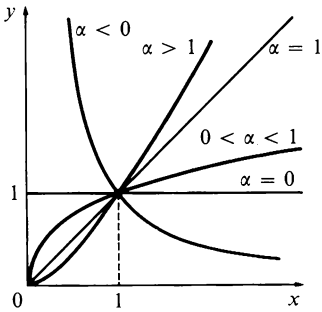
$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} = \frac{\ln b}{\ln a} .$$

Le logarithme de base 10 s'appelle logarithme décimal.

Fonctions puissances. Soit α un nombre réel. La fonction $f : x \mapsto x^\alpha$ est un endomorphisme monotone du groupe multiplicatif $\mathbf{R}_+^*$, appelé fonction puissance α.

Si $\alpha > 0$, f est bijective strictement croissante.
Si $\alpha < 0$, f est bijective strictement décroissante.
Si $\alpha = 0$, f est constante et égale à 1.

Réciproquement, tout endomorphisme monotone de $\mathbf{R}_+^*$ est de la forme précédente.



Fonction puissance α.

Comparaison des fonctions logarithmes, puissances et exponentielles. Soient a un nombre réel strictement supérieur à 1, α et β deux nombres réels strictement positifs. Alors

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} \exp_a(-\beta x) = 0 , \qquad \lim_{x \to +\infty} x^{-\beta} (\log_a x)^{\alpha} = 0 ,$$

$$\lim_{x \to 0} x^{\beta} \, | \log_a x |^{\alpha} = 0 , \qquad \lim_{x \to -\infty} | x |^{\beta} \exp_a \alpha x = 0 .$$

Fonctions hyperboliques

Définition :

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} , \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

Pour tout nombre réel x,

$$e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x \qquad e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$$

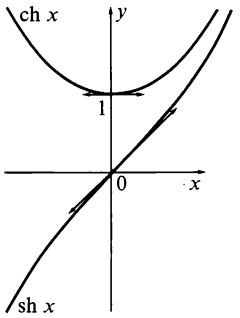
$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 .$$

Formules d'addition. Pour tout couple (a, b) de nombres réels,

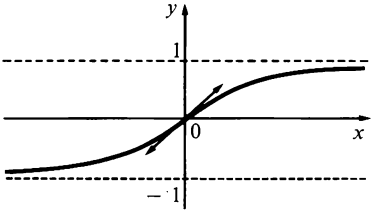
$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b , \quad \operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$$

$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b , \quad \operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b$$

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b} , \qquad \operatorname{th}(a-b) = \frac{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b}{1 - \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$$



Fonctions cosinus et sinus hyperboliques.



Fonction tangente hyperbolique.

$\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b = \frac{1}{2}[\operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{ch}(a-b)]$, $\operatorname{sh} a \operatorname{sh} b = \frac{1}{2}[\operatorname{ch}(a+b) - \operatorname{ch}(a-b)]$

$\operatorname{sh} a \operatorname{ch} b = \frac{1}{2}[\operatorname{sh}(a+b) + \operatorname{sh}(a-b)]$.

Pour tout couple (p, q) de nombres réels,

$$\operatorname{ch} p + \operatorname{ch} q = 2 \operatorname{ch} \frac{p+q}{2} \operatorname{ch} \frac{p-q}{2}, \quad \operatorname{ch} p - \operatorname{ch} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p+q}{2} \operatorname{sh} \frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{sh} p + \operatorname{sh} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p+q}{2} \operatorname{ch} \frac{p-q}{2}, \quad \operatorname{sh} p - \operatorname{sh} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p-q}{2} \operatorname{ch} \frac{p+q}{2}$$

$$\operatorname{th} p + \operatorname{th} q = \frac{\operatorname{sh}(p+q)}{\operatorname{ch} p \operatorname{ch} q}, \qquad \operatorname{th} p - \operatorname{th} q = \frac{\operatorname{sh}(p-q)}{\operatorname{ch} p \operatorname{ch} q}.$$

Pour tout nombre réel a,

$$\operatorname{ch} 2a = \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a = 2\operatorname{ch}^2 a - 1 = 2\operatorname{sh}^2 a + 1$$

$$\operatorname{sh} 2a = 2 \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a ,$$

$$\operatorname{ch}^2 a = \frac{\operatorname{ch} 2a + 1}{2}, \quad \operatorname{sh}^2 a = \frac{\operatorname{ch} 2a - 1}{2}$$

$$\operatorname{ch} 2a = \frac{1 + \operatorname{th}^2 a}{1 - \operatorname{th}^2 a}, \quad \operatorname{sh} 2a = \frac{2 \operatorname{th} a}{1 - \operatorname{th}^2 a}$$

$$\operatorname{th} 2a = \frac{2 \operatorname{th} a}{1 + \operatorname{th}^2 a}, \quad \exp 2a = \frac{1 + \operatorname{th} a}{1 - \operatorname{th} a}$$

$$\operatorname{th} a = \frac{\operatorname{sh} 2a}{1 + \operatorname{ch} 2a} = \frac{\operatorname{ch} 2a - 1}{\operatorname{sh} 2a}, \quad \text{si } a \neq 0$$

$$\operatorname{ch} 3a = 4\operatorname{ch}^3 a - 3 \operatorname{ch} a , \quad \operatorname{sh} 3a = 4\operatorname{sh}^3 a + 3 \operatorname{sh} a$$

$$\operatorname{th} 3a = \frac{3 \operatorname{th} a + \operatorname{th}^3 a}{1 + 3\operatorname{th}^2 a} .$$

$$\sum_{p=0}^{n} \operatorname{ch} (a + ph) = \frac{\operatorname{sh} (n + 1)\frac{h}{2} \operatorname{ch} \left(a + \frac{nh}{2}\right)}{\operatorname{sh} \frac{h}{2}}$$

$$\sum_{p=0}^{n} \operatorname{sh} (a + ph) = \frac{\operatorname{sh} (n + 1)\frac{h}{2} \operatorname{sh} \left(a + \frac{nh}{2}\right)}{\operatorname{sh} \frac{h}{2}} .$$

Formule de Moivre et applications. Pour tout entier rationnel n,

$$(\operatorname{ch} a + \operatorname{sh} a)^n = \operatorname{ch} na + \operatorname{sh} na , \quad (\operatorname{ch} a - \operatorname{sh} a)^n = \operatorname{ch} na - \operatorname{sh} na .$$

Pour tout entier naturel non nul n,

$$\operatorname{ch} na = \operatorname{ch}^n a + C_n^2 \operatorname{ch}^{n-2} a \operatorname{sh}^2 a + \cdots + C_n^{2p} \operatorname{ch}^{n-2p} a \operatorname{sh}^{2p} a + \cdots$$

$$\operatorname{sh} na = C_n^1 \operatorname{ch}^{n-1} a \operatorname{sh} a + C_n^3 \operatorname{ch}^{n-3} a \operatorname{sh}^3 a + \cdots + C_n^{2p+1} \operatorname{ch}^{n-2p-1} a \operatorname{sh}^{2p+1} a + \ldots$$

$$\operatorname{th} na = \frac{C_n^1 \operatorname{th} a + C_n^3 \operatorname{th}^3 a + \cdots + C_n^{2p+1} \operatorname{th}^{2p+1} a + \cdots}{1 + C_n^2 \operatorname{th}^2 a + \cdots + C_n^{2p} \operatorname{th}^{2p} a + \cdots} .$$

Formules de linéarisation. Pour tout entier naturel non nul p,

$$\operatorname{ch}^{2p} a = \frac{1}{2^{2p-1}} \left[\sum_{q=0}^{p-1} C_{2p}^{q} \operatorname{ch} [(2p - 2q) a] + \frac{1}{2} C_{2p}^{p} \right]$$

$$\operatorname{sh}^{2p} a = \frac{1}{2^{2p-1}} \left[\sum_{q=0}^{p-1} (-1)^q C_{2p}^{q} \operatorname{ch} [(2p - 2q) a] + \frac{(-1)^p}{2} C_{2p}^{p} \right].$$

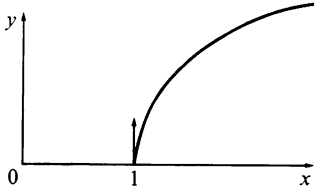
Pour tout entier naturel p,

$$\operatorname{ch}^{2p+1} a = \frac{1}{2^{2p}} \sum_{q=0}^{p} C_{2p+1}^{q} \operatorname{ch} [(2p + 1 - 2q) a]$$

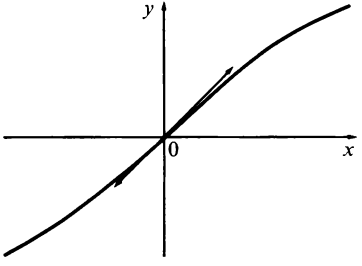
$$\operatorname{sh}^{2p+1} a = \frac{1}{2^{2p}} \sum_{q=0}^{p} (-1)^q C_{2p+1}^{q} \operatorname{sh} [(2p + 1 - 2q) a].$$

Fonctions hyperboliques réciproques. Pour tout nombre réel x supérieur à 1,

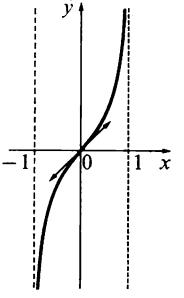
$$\operatorname{Arg ch} x = \ln (x + \sqrt{x^2 - 1}).$$



Fonction argument cosinus hyperbolique.



Fonction argument sinus hyperbolique.



Fonction argument tangente hyperbolique.

Pour tout nombre réel x,

$$\operatorname{Arg\,sh} x = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1}) .$$

Pour tout nombre réel x appartenant à $]-1, 1[$,

$$\operatorname{Arg\,th} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} .$$

Fonctions circulaires

Définition :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = i \frac{e^{-ix} - e^{ix}}{e^{-ix} + e^{ix}}$$

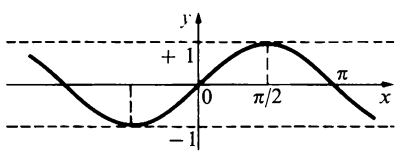
$$= i \frac{e^{-2ix} - 1}{e^{-2ix} + 1} = i \frac{1 - e^{2ix}}{1 + e^{2ix}} \quad \text{si} \quad x \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = i \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}} \quad \text{si} \quad x \not\equiv 0 \pmod{\pi} .$$

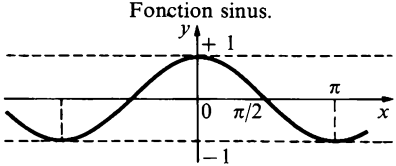
Pour tout nombre réel x,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

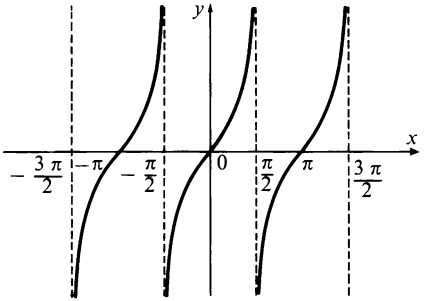
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 .$$



Fonction sinus.



Fonction cosinus.



Fonction tangente.

Formules d'addition. Pour tout couple (a, b) de nombres réels,

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b\,,\quad \cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$$

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b\,,\quad \sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$$

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}\quad a, b, a+b\not\equiv\frac{\pi}{2}\pmod{\pi}$$

$$\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}\quad a, b, a-b\not\equiv\frac{\pi}{2}\pmod{\pi}$$

$$\cos a\cos b=\tfrac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$$

$$\sin a\sin b=\tfrac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$$

$$\sin a\cos b=\tfrac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]\,.$$

Pour tout couple (p, q) de nombres réels,

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\,,\quad \cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\,,\quad \sin p-\sin q=2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\tan p+\tan q=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}\quad\text{si}\quad p, q\not\equiv\frac{\pi}{2}\pmod{\pi}$$

$$\tan p-\tan q=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}\quad\text{si}\quad p, q\not\equiv\frac{\pi}{2}\pmod{\pi}\,.$$

Pour tout nombre réel a,

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a \quad \cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}, \quad \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}.$$

Pour tout nombre réel a,

$$\cos 2a = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a} \qquad \text{si} \quad a \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$$

$$\sin 2a = \frac{2\tan a}{1 + \tan^2 a} \qquad \text{si} \quad a \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$$

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a} \qquad \text{si} \quad a, 2a \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$$

$$e^{2ia} = \frac{1 + i\tan a}{1 - i\tan a} \qquad \text{si} \quad a \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$$

$$\tan a = \frac{\sin 2a}{1 + \cos 2a} = \frac{1 - \cos 2a}{\sin 2a} \quad \text{si} \quad a \not\equiv 0 \pmod{\pi/2}$$

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a, \quad \sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$$

$$\tan 3a = \frac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a} \quad \text{si} \quad 3a \not\equiv \pi/2 \pmod{\pi}$$

$$\sum_{p=0}^{n} \cos(a + ph) = \frac{\sin(n+1)\frac{h}{2}\cos\left(a + \frac{nh}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}}$$

$$\sum_{p=0}^{n} \sin(a + ph) = \frac{\sin(n+1)\frac{h}{2}\sin\left(a + \frac{nh}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}}.$$

Formule de Moivre et applications. Pour tout entier rationnel n,

$$(\cos a + i\sin a)^n = \cos na + i\sin na, \quad (\cos a - i\sin a)^n = \cos na - i\sin na.$$

Pour tout entier naturel non nul n,

$$\cos na = \cos^n a - C_n^2 \cos^{n-2} a \sin^2 a + \cdots$$
$$+ (-1)^p C_n^{2p} \cos^{n-2p} a \sin^{2p} a + \cdots$$

$$\sin na = C_n^1 \cos^{n-1} a \sin a - C_n^3 \cos^{n-3} a \sin^3 a + \cdots$$
$$+ (-1)^p C_n^{2p+1} \cos^{n-2p-1} a \sin^{2p+1} a + \cdots$$
$$\tan na = \frac{C_n^1 \tan a - C_n^3 \tan^3 a + \cdots + (-1)^p C_n^{2p+1} \tan^{2p+1} a + \cdots}{1 - C_n^2 \tan^2 a + \cdots + (-1)^p C_n^{2p} \tan^{2p} a + \cdots}$$

si a, $na \not\equiv \pi/2 \pmod{\pi}$.

Formules de linéarisation. Pour tout entier naturel non nul p,

$$\cos^{2p} a = \frac{1}{2^{2p-1}} \left(\sum_{q=0}^{p-1} C_{2p}^q \cos [(2p-2q)a] + \frac{1}{2} C_{2p}^p \right)$$
$$\sin^{2p} a = \frac{(-1)^p}{2^{2p-1}} \left(\sum_{q=0}^{p-1} (-1)^q C_{2p}^q \cos [(2p-2q)a] + \frac{(-1)^p}{2} C_{2p}^p \right).$$

Pour tout entier naturel p,

$$\cos^{2p+1} a = \frac{1}{2^{2p}} \sum_{q=0}^{p} C_{2p+1}^q \cos [(2p+1-2q)a]$$
$$\sin^{2p+1} a = \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \sum_{q=0}^{p} (-1)^q C_{2p+1}^q \sin [(2p+1-2q)a].$$

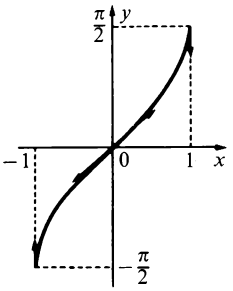
Valeurs remarquables des fonctions circulaires

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1
tan	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$		0

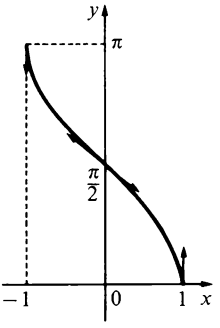
Un moyen mnémotechnique pour retenir les valeurs du sinus de 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ et $\pi/2$ consiste à écrire ces valeurs sous la forme $\sqrt{0}/2$, $\sqrt{1}/2$, $\sqrt{2}/2$, $\sqrt{3}/2$, $\sqrt{4}/2$.

Fonctions circulaires réciproques. Pour tout nombre réel x appartenant à $[-1, 1]$,

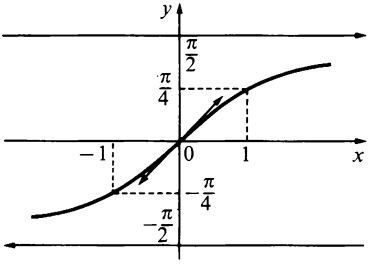
$$\text{Arc sin } x + \text{Arc cos } x = \pi/2 .$$



Fonction arc sinus.



Fonction arc cosinus.



Fonction arc tangente.

Pour tout nombre réel non nul a,

$$\text{Arc tan } a + \text{Arc tan } \frac{1}{a} = \frac{\pi}{2} \quad \text{si } a > 0$$

$$= -\frac{\pi}{2} \quad \text{si} \quad a < 0 .$$

Pour tout couple (a, b) de nombres réels tel que $ab \neq 1$,

$$\text{Arc tan } a + \text{Arc tan } b - \text{Arc tan } \frac{a+b}{1-ab} = 0 \quad \text{si} \quad ab < 1$$

$$= \pi \quad \text{si} \quad ab > 1, a > 0, b > 0$$

$$= -\pi \quad \text{si} \quad ab > 1, a < 0, b < 0 .$$

b) **Tableau des dérivées usuelles**

On pose $P = \frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}$ et $Q = \pi\mathbf{Z}$.

Fonctions		*Dérivées*	*Intervalles*
x^n	$n \in \mathbf{Z}$	nx^{n-1}	$\mathbf{R}^*$
x^α	$\alpha \in \mathbf{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbf{R}_+^*$
e^{cx}	$c \in \mathbf{C}$	ce^{cx}	$\mathbf{R}$
u^x	$u \in \mathbf{R}_+^*$	$u^x \ln u$	$\mathbf{R}$
$\ln \lvert x \rvert$		$1/x$	$\mathbf{R}^*$
$\log_a \lvert x \rvert$	$a \in \mathbf{R}_+^* - \{1\}$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\mathbf{R}^*$
$\operatorname{ch} x$		$\operatorname{sh} x$	$\mathbf{R}$
$\operatorname{sh} x$		$\operatorname{ch} x$	$\mathbf{R}$
$\operatorname{th} x$		$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$	$\mathbf{R}$
$\coth x$		$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = 1 - \coth^2 x$	$\mathbf{R}^*$
$\cos x$		$-\sin x$	$\mathbf{R}$
$\sin x$		$\cos x$	$\mathbf{R}$
$\tan x$		$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\mathbf{R} - P$
$\cot x$		$-\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$	$\mathbf{R} - Q$
$\operatorname{Arg ch} x$		$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$	$]1, +\infty[$
$\operatorname{Arg sh} x$		$\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$	$\mathbf{R}$
$\operatorname{Arg th} x$		$\frac{1}{1 - x^2}$	$]-1, 1[$
$\operatorname{Arc cos} x$		$-\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$]-1, 1[$
$\operatorname{Arc sin} x$		$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$]-1, 1[$
$\operatorname{Arc tan} x$		$\frac{1}{1 + x^2}$	$\mathbf{R}$

c) Tableau des primitives usuelles

On pose $P = \frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}$ et $Q = \pi\mathbf{Z}$.

Fonctions		*Primitives*	*Intervalles*
$(x-c)^n$	$c \in \mathbf{C}$ $n \in \mathbf{Z} - \{-1\}$	$\frac{(x-c)^{n+1}}{n+1}$	$\mathbf{R}$
$(x-a)^\alpha$	$a \in \mathbf{R}$ $\alpha \in \mathbf{R} - \{-1\}$	$\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]a, +\infty[$
$\frac{1}{x-a}$	$a \in \mathbf{R}$	$\ln \lvert x-a \rvert$	$\mathbf{R} - \{a\}$
$\frac{1}{x-c}$	$c = a+ib$ $a \in \mathbf{R}\ b \in \mathbf{R}^*$	$\ln \lvert x-c \rvert + i \operatorname{Arg}(x-c)$ $= \frac{1}{2} \ln [(x-a)^2+b^2]$ $+ i \operatorname{Arc tan} \frac{x-a}{b}$	$\mathbf{R}$
$\ln x$		$x(\ln x - 1)$	$\mathbf{R}_+^*$
e^{cx}	$c \in \mathbf{C}^*$	$\frac{e^{cx}}{c}$	$\mathbf{R}$
$\operatorname{ch} x$		$\operatorname{sh} x$	$\mathbf{R}$
$\operatorname{sh} x$		$\operatorname{ch} x$	$\mathbf{R}$
$\cos x$		$\sin x$	$\mathbf{R}$
$\sin x$		$-\cos x$	$\mathbf{R}$
$\operatorname{th} x$		$\ln(\operatorname{ch} x)$	$\mathbf{R}$
$\coth x$		$\ln \lvert \operatorname{sh} x \rvert$	$\mathbf{R}^*$
$\operatorname{ch}^2 x$		$\frac{\operatorname{sh} 2x}{4} + \frac{x}{2}$	$\mathbf{R}$
$\operatorname{sh}^2 x$		$\frac{\operatorname{sh} 2x}{4} - \frac{x}{2}$	$\mathbf{R}$
$\operatorname{th}^2 x$		$x - \operatorname{th} x$	$\mathbf{R}$
$\coth^2 x$		$x - \coth x$	$\mathbf{R}^*$
$\tan x$		$-\ln \lvert \cos x \rvert$	$\mathbf{R} - P$

Fonctions	*Primitives*	*Intervalles*
$\cot x$	$\ln \lvert \sin x \rvert$	$\mathbf{R} - \mathcal{Q}$
$\cos^2 x$	$\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$	$\mathbf{R}$
$\sin^2 x$	$\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$	$\mathbf{R}$
$\tan^2 x$	$\tan x - x$	$\mathbf{R} - P$
$\cot^2 x$	$-\cot x - x$	$\mathbf{R} - Q$
$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	$\mathrm{th}\, x$	$\mathbf{R}$
$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$	$-\coth x$	$\mathbf{R}^*$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\mathbf{R} - P$
$\frac{1}{\cos^3 x}$	$\frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left\lvert \tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert$	$\mathbf{R} - P$
$\frac{1}{\cos^4 x}$	$\tan x + \frac{\tan^3 x}{3}$	$\mathbf{R} - P$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$	$\mathbf{R} - Q$
$\frac{1}{\sin^3 x}$	$\frac{1}{2}\ln\left\lvert \tan\frac{x}{2}\right\rvert - \frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x}$	$\mathbf{R} - Q$
$\frac{1}{\sin^4 x}$	$-\cot x - \frac{\cot^3 x}{3}$	$\mathbf{R} - Q$
$\frac{1}{\mathrm{ch}\, x}$	$\begin{cases} 2\,\mathrm{Arc}\tan \mathrm{e}^x \\ 2\,\mathrm{Arc}\tan \mathrm{th}\frac{x}{2} = \mathrm{Arc}\tan \mathrm{sh}\, x \end{cases}$	$\mathbf{R}$
$\frac{1}{\mathrm{sh}\, x}$	$\ln\left\lvert \mathrm{th}\frac{x}{2}\right\rvert$	$\mathbf{R}^*$
$\frac{1}{\cos x}$	$\ln\left\lvert \tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert$	$\mathbf{R} - P$
$\frac{1}{\sin x}$	$\ln\left\lvert \tan\frac{x}{2}\right\rvert$	$\mathbf{R} - Q$

Fonctions		*Primitives*	*Intervalles*
$\dfrac{1}{1+x^2}$		$\operatorname{Arc\,tan} x$	$\mathbf{R}$
$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	$a \in \mathbf{R}_+^*$	$\dfrac{1}{a}\operatorname{Arc\,tan}\dfrac{x}{a}$	$\mathbf{R}$
$\dfrac{1}{1-x^2}$		$\begin{cases} \operatorname{Arg\,th} x \\ \dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert \end{cases}$	$]-1,1[$ $\mathbf{R}-\{-1,1\}$
$\dfrac{1}{a^2-x^2}$	$a \in \mathbf{R}_+^*$	$\dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{a+x}{a-x}\right\rvert$	$\mathbf{R}-\{-a,a\}$
$\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$		$\dfrac{1}{2}\operatorname{Arc\,tan} x + \dfrac{x}{2(x^2+1)}$	$\mathbf{R}$
$\dfrac{x^2}{(x^2+1)^2}$		$\dfrac{1}{2}\operatorname{Arc\,tan} x - \dfrac{x}{2(x^2+1)}$	$\mathbf{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$\operatorname{Arc\,sin} x = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arc\,cos} x$	$]-1,1[$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$a \in \mathbf{R}_+^*$	$\operatorname{Arc\,sin}\dfrac{x}{a}$	$]-a,a[$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$		$\operatorname{Arg\,sh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$	$\mathbf{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$	$a \in \mathbf{R}_+^*$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$	$\mathbf{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$		$\begin{cases} \operatorname{Arg\,ch} x \\ -\operatorname{Arg\,ch}(-x) \\ \ln\lvert x+\sqrt{x^2-1}\rvert \end{cases}$	$]1,+\infty[$ $]-\infty,-1[$ $\mathbf{R}-[-1,1]$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$a \in \mathbf{R}_+^*$	$\ln\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert$	$\mathbf{R}-[-a,a]$
$e^{ax}\cos bx$	$a, b \in \mathbf{C}^*$ $a^2+b^2 \neq 0$	$\dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)$	$\mathbf{R}$
$e^{ax}\sin bx$	$a, b \in \mathbf{C}^*$ $a^2+b^2 \neq 0$	$\dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$	$\mathbf{R}$

Intégrales classiques

Intégrale de Wallis

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx \qquad n \in \mathbf{N}$$

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2} \qquad I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Intégrale d'Euler

$$\int_0^{\pi/2} \ln \cos x \, dx = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2 .$$

Intégrale de Poisson

$$\int_0^{\pi} \ln (x^2 - 2x \cos t + 1) \, dt = 0 \qquad \text{si} \quad |x| \leqslant 1$$

$$= 2\pi \ln |x| \quad \text{si} \quad |x| > 1 .$$

Fonctions eulériennes. Fonction eulérienne de deuxième espèce (ou fonction gamma) :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \, dx \qquad x > 0 .$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad \Gamma(n+1) = n! \qquad n \in \mathbf{N}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} \, du = \sqrt{\pi} \qquad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi} .$$

Fonction eulérienne de première espèce (ou fonction beta) :

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \qquad p > 0, q > 0 .$$

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} \, dt = \int_0^{+\infty} \frac{u^{q-1}}{(1+u)^{p+q}} \, du$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1} x \sin^{2q-1} x \, dx .$$

Formule des compléments :

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \qquad 0 < x < 1 .$$

Formule de Stirling :

$$\Gamma(x+1) \sim x^x\, e^{-x} \sqrt{2\pi x} \qquad \text{au voisinage de } +\infty .$$

Intégrales de Dirichlet

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} .$$

4. FONCTIONS VECTORIELLES D'UNE VARIABLE RÉELLE

Les définitions et les propriétés relatives aux fonctions numériques ne faisant intervenir que la linéarité s'étendent aisément au cas des fonctions d'une variable réelle à valeurs dans un espace vectoriel normé F. (Dans le cas de l'intégration, on doit supposer F complet.)

Inégalité des accroissements finis. Soit f une application continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbf{R}$ à valeurs dans F, dérivable sur $]a, b[$ et telle que f' soit bornée sur $]a, b[$. Alors

$$\| f(b) - f(a) \| \leqslant (b-a) \sup_{x \in]a,b[} \| f'(x) \| .$$

Inégalité de Taylor-Lagrange. Soient n un entier naturel et f une application de $[a, b]$ dans F, n fois continûment dérivable sur $[a, b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$, telle que $f^{(n+1)}$ soit bornée sur $]a, b[$. Alors

$$\left\| f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(b-a) - \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n \right\|$$
$$\leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{x \in]a,b[} \| f^{(n+1)}(x) \| .$$

La formule de Taylor-Young s'étend sans changement.

VIII. CALCUL DIFFÉRENTIEL

1. APPLICATIONS D'UN OUVERT DE $\mathbf{R}^p$ DANS $\mathbf{R}^n$

a) Applications partielles en un point

Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $B = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_p)$ la base canonique de $\mathbf{R}^p$, U un ouvert de $\mathbf{R}^p$ et $\boldsymbol{f}$ une application de U dans $\mathbf{R}^n$.

Soit $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$ un point de U. Pour tout élément j de $[1, p]$, on appelle j-ième application partielle associée à $\boldsymbol{f}$ la restriction

$$\boldsymbol{f}_j : x \mapsto \boldsymbol{f}(a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \ldots, a_p)$$

de $\boldsymbol{f}$ à $D_j(\boldsymbol{a}) \cap U$, où $D_j(\boldsymbol{a})$ est la droite affine passant par $\boldsymbol{a}$ de vecteur directeur $\boldsymbol{e}_j$.

Continuité partielle. Si $\boldsymbol{f}$ est continue au point $\boldsymbol{a}$, alors, pour tout élément j de $[1, p]$, l'application partielle $\boldsymbol{f}_j$ est continue au point a_j.

En revanche, la continuité par rapport à chaque variable n'implique pas la continuité de $\boldsymbol{f}$ au point $\boldsymbol{a}$.

Dérivées partielles. Soit j un élément de $[1, p]$. Si l'application partielle $\boldsymbol{f}_j$ associée à $\boldsymbol{f}$ au point $\boldsymbol{a}$ admet une dérivée au point a_j, cette dérivée s'appelle dérivée partielle de $\boldsymbol{f}$ par rapport à x_j au point $\boldsymbol{a}$ et se note $\boldsymbol{f}'_{x_j}(\boldsymbol{a})$ ou $\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$.

b) Dérivées partielles d'ordre supérieur

Si l'application $\boldsymbol{f}$ admet une dérivée partielle par rapport à x_j en tout point de U, l'application $\boldsymbol{x} \mapsto \dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})$ s'appelle dérivée partielle de $\boldsymbol{f}$ par rapport à x_j et se note $\boldsymbol{f}'_{x_j}$ ou $\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}$.

Soit i un élément de $[1, p]$. Si l'application $\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}$ admet une dérivée partielle par rapport à x_i, celle-ci se note $\boldsymbol{f}''_{x_i x_j}$ ou $\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial x_i \, \partial x_j}$ $\left(\boldsymbol{f}''_{x_i^2}$ ou $\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial x_i^2}$ si $i = j\right)$.

2. APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES

a) Différentielle d'une application

Soient A et B deux espaces affines attachés à des espaces vectoriels normés E et F de dimension finie sur $\mathbf{R}$, U un ouvert de A et f une application de U dans B.

Application linéaire tangente en un point. Soit a un point de U. On dit que l'application f est différentiable au point a s'il existe une application linéaire g de E dans F telle que

$$\| f(x) - f(a) - g(x - a) \| = o(\| x - a \|) .$$

Une telle application g est unique ; on l'appelle application linéaire tangente à f, ou différentielle de f, au point a et on la note $\mathrm{d}_a f$.

Différentielle sur un ouvert. On dit que f est différentiable sur U si f est différentiable en tout point de U. L'application $x \mapsto \mathrm{d}_x f$ s'appelle différentielle de f et se note $\mathrm{d}f$.

On dit que f est continûment différentiable, ou de classe C^1, sur U si l'application $\mathrm{d}f$ de U dans $\mathscr{L}(E, F)$ est continue.

b) Liens entre différentielles et dérivées partielles

Soient $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de E et O une origine de A, permettant d'identifier A à $\mathbf{R}^p$.

Si f est différentiable au point a, alors f est continue en ce point et admet une dérivée partielle par rapport à chaque variable en ce point.

Si f admet des dérivées partielles sur U par rapport à chaque variable et si ces dérivées partielles sont continues au point a, alors f est différentiable en ce point.

Pour que f soit continûment différentiable sur U, il faut et il suffit que f admette des dérivées partielles par rapport à chaque variable et que ces dérivées partielles soient continues sur U.

Théorème de Schwarz. Soient f une application continûment différentiable sur un ouvert U de $\mathbf{R}^p$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, a un point de U et (i, j) un couple d'éléments distincts de $[1, p]$. Si f admet les dérivées partielles du second ordre $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_i}$ sur U et si ces fonctions sont continues au point a, alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_i}(a) .$$

Soient $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ une base de F et O' une origine de B, permettant d'identifier B à $\mathbf{R}^n$. L'application f s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i \, e'_i \, .$$

Pour que f soit différentiable au point a, il faut et il suffit que chacune des fonctions f_i le soit. Dans ces conditions, pour tout élément i de $[1, n]$ et pour tout élément j de $[1, p]$, f_i admet une dérivée partielle par rapport à x_j au point a. La matrice associée à $d_a f$ dans les bases $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ et $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ est $(\partial f_i / \partial x_j)$; on l'appelle matrice jacobienne de f au point a et on la note $\mathrm{jac}_a f$.

Pour que f soit continûment différentiable sur U, il faut et il suffit que les np fonctions numériques $\partial f_i / \partial x_j$ soient continues sur U.

Jacobien. Lorsque les dimensions de E et de F sont égales, le déterminant de l'application linéaire tangente à f au point a s'appelle jacobien de f au point a ; pour toute base de E et pour toute base de F, le jacobien de f au point a est égal au déterminant de la matrice jacobienne de f au point a. On le note

$$\frac{\mathrm{D}(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\mathrm{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(a) \, .$$

Jacobien du passage en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(\rho, \theta)} = \rho \, .$$

Jacobien du passage en coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \cos \varphi \\ z = r \sin \varphi \end{cases} \quad \frac{\mathrm{D}(x, y, z)}{\mathrm{D}(r, \theta, \varphi)} = r^2 \cos \varphi \, .$$

c) Composition d'applications différentiables

Soient A, B et C trois espaces affines attachés à des espaces vectoriels normés E, F et G de dimension finie sur $\mathbf{R}$, f une application définie sur un ouvert U de A à valeurs dans B et g une application définie sur un ouvert V de B contenant $f(U)$ à valeurs dans C.

Si f est différentiable en un point a de U et si g est différentiable au point $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable au point a et

$$d_a(g \circ f) = d_{f(a)} g \circ d_a f .$$

En particulier, si les espaces vectoriels E, F et G sont munis de bases,

$$\mathrm{jac}_a(g \circ f) = (\mathrm{jac}_{f(a)} g)(\mathrm{jac}_a f) .$$

Si E, F et G ont même dimension,

$$\frac{D(g_1, g_2, \ldots, g_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(a) = \frac{D(g_1, g_2, \ldots, g_n)}{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}(f(a)) \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(a) .$$

Inégalité des accroissements finis. Soient E et F des espaces vectoriels normés, U un ouvert de E et f une application de U dans F différentiable sur U. Pour tout couple (a, b) de points de U tel que le segment $[a, b]$ soit contenu dans U et que $d_x f$ soit bornée sur $[a, b]$,

$$\| f(b) - f(a) \| \leqslant \| b - a \| \sup_{x \in]a,b[} \| d_x f \| .$$

Si U est connexe et si $df = 0$, alors f est constante.

3. CAS PARTICULIER D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

Formule des accroissements finis. Soient A un espace affine attaché à un espace vectoriel normé E de dimension finie sur $\mathbf{R}$, U un ouvert de A, f une fonction numérique définie sur U et $[a, b]$ un segment de A contenu dans U.

Si f est différentiable sur U, il existe au moins un nombre réel θ appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ tel que

$$f(b) = f(a) + \langle d_{a+\theta(b-a)} f, b - a \rangle .$$

Soient B une base de E, $h_1, h_2, \ldots, h_p$ les composants de $b - a$ dans cette base. Alors

$$f(b) = f(a) + \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}[a + \theta(b - a)] .$$

Formule de Taylor-Lagrange. Sous les mêmes hypothèses, soit n un entier naturel tel que f admette des dérivées partielles jusqu'à l'ordre $n + 1$ continues sur U. Il existe alors au moins un nombre réel θ appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ tel que

$$f(b) = f(a) + \frac{(Hf)(a)}{1!} + \frac{(H^2 f)(a)}{2!} + \cdots + \frac{(H^n f)(a)}{n!} + \frac{(H^{n+1} f)[a + \theta(b-a)]}{(n+1)!} ,$$

où H est l'application définie par la relation

$$Hf = \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j},$$

et où $h_1, h_2, \ldots, h_p$ sont les composants de $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$.

Il découle du théorème de Schwarz que les puissances successives de H se calculent à l'aide de la formule du binôme généralisée.

Extremum. Soit f une fonction numérique définie sur un ouvert U de $\mathbf{R}^2$, admettant des dérivées partielles premières et secondes continues sur U. Soit $\boldsymbol{a}$ un point de U. On pose

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{a}) \qquad q = \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{a})$$

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{a}) \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(\boldsymbol{a}) \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\boldsymbol{a}).$$

Pour que f admette un maximum ou un minimum local au point $\boldsymbol{a}$, il faut que

$$p = q = 0.$$

Dans ces conditions :

— Si $rt - s^2 > 0$, $r < 0$, f admet un maximum local strict au point $\boldsymbol{a}$.
— Si $rt - s^2 > 0$, $r > 0$, f admet un minimum local strict au point $\boldsymbol{a}$.
— Si $rt - s^2 < 0$, f n'admet ni maximum local ni minimum local au point $\boldsymbol{a}$.

Continuité et dérivabilité d'une intégrale par rapport à un paramètre. Soient $I = [a, b]$ un intervalle compact de $\mathbf{R}$, U un ouvert de $\mathbf{R}$ et f une fonction numérique continue sur $I \times U$. Alors la fonction

$$g : x \mapsto \int_a^b f(t, x)\, \mathrm{d}t$$

est continue sur U.

Si, de plus, f admet une dérivée partielle par rapport à x continue sur $I \times U$, la fonction g est continûment dérivable et, pour tout point x_0 de U,

$$g'(x_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0)\, \mathrm{d}t.$$

Soient plus généralement α et β des fonctions numériques dérivables sur J à valeurs dans I. Alors la fonction

$$g : x \mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t, x)\, \mathrm{d}t$$

est continûment dérivable et, pour tout point x_0 de U,

$$g'(x_0) = \int_{\alpha(x_0)}^{\beta(x_0)} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0)\, \mathrm{d}t + \beta'(x_0)\, f(\beta(x_0), x_0) - \alpha'(x_0)\, f(\alpha(x_0), x_0)\,.$$

Fonctions homogènes. Soient f une fonction numérique définie sur un cône C de sommet O d'un espace vectoriel E sur $\mathbf{R}$, et α un nombre réel. On dit que f est positivement homogène de degré α si, pour tout nombre réel strictement positif λ et pour tout élément $\boldsymbol{x}$ de C,

$$f(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda^{\alpha} f(\boldsymbol{x})\,.$$

Soit f une fonction différentiable sur un cône ouvert C de $\mathbf{R}^p$. Pour que f soit positivement homogène de degré α, il faut et il suffit que, pour tout point $\boldsymbol{x} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ de C,

$$\sum_{j=1}^{p} \xi_j \frac{\partial f}{\partial \xi_j}(\boldsymbol{x}) = \alpha f(\boldsymbol{x}) \quad \text{(relation d'Euler)}\,.$$

4. FONCTIONS IMPLICITES

Soient A et B deux espaces affines attachés à des espaces vectoriels normés E et F de dimension finie sur $\mathbf{R}$, U un ouvert de A, V un ouvert de B, $\boldsymbol{f}$ une application continûment différentiable de $U \times V$ dans B et $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ un élément de $U \times V$ tel que

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}\,.$$

Si l'application linéaire tangente à l'application $\boldsymbol{y} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y})$ au point $\boldsymbol{b}$ est un automorphisme de F, il existe un voisinage ouvert U' de $\boldsymbol{a}$ contenu dans U et un voisinage ouvert V' de $\boldsymbol{b}$ contenu dans V tels que, pour tout point $\boldsymbol{x}$ de U', l'équation $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$ ait une solution $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ et une seule dans V'. L'application $\boldsymbol{g}$ de U' dans B ainsi définie est continûment différentiable.

Cas où $E = \mathbf{R}^p$ *et où* $F = \mathbf{R}$. Pour tout élément j de $[1, p]$,

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = -\frac{\partial f/\partial x_j}{\partial f/\partial y}.$$

Application réciproque d'une application. Soient A et B deux espaces affines attachés à deux espaces vectoriels normés E et F de même dimension, U un ouvert de A et $\boldsymbol{f}$ une application continûment différentiable de U dans B. Soit $\boldsymbol{a}$ un point de U tel que l'application linéaire tangente à $\boldsymbol{f}$ en ce point soit un isomorphisme de E sur F. Il existe alors un voisinage ouvert V de $\boldsymbol{a}$ contenu dans U et un voisinage ouvert W de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ tels que $\boldsymbol{f}$ soit un difféomorphisme de V sur W. L'application linéaire tangente à $\boldsymbol{f}^{-1}$ au point $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ est l'application réciproque de l'application linéaire tangente à $\boldsymbol{f}$ au point $\boldsymbol{a}$. En particulier, si E est muni d'une base, les matrices jacobiennes de $\boldsymbol{f}$ et de $\boldsymbol{f}^{-1}$ aux points $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ sont inverses l'une de l'autre.

IX. SÉRIES

1. SÉRIES NUMÉRIQUES A TERMES RÉELS OU COMPLEXES

a) Convergence

On appelle série tout couple $A = ((u_n), (s_n))$ constitué de deux suites de nombres complexes telles que, pour tout entier naturel p,

$$s_p = \sum_{n=0}^{p} u_n .$$

L'élément u_n s'appelle terme d'ordre n de A, et l'élément s_n s'appelle somme partielle d'ordre n de A. La suite (u_n) s'appelle terme général de la série A, et la suite (s_n), suite des sommes partielles de A.

On appelle somme de deux séries $A = ((u_n), (s_n))$ et $B = ((v_n), (t_n))$ la série de terme général $(u_n + v_n)$. Il est immédiat que

$$A + B = ((u_n + v_n), (s_n + t_n)) .$$

On appelle produit d'une série $A = ((u_n), (s_n))$ par un nombre complexe α la série, notée αA, de terme général (αu_n). Il est immédiat que

$$\alpha A = ((\alpha u_n), (\alpha s_n)) .$$

Muni des deux lois précédentes, l'ensemble $\Sigma(\mathbf{C})$ des séries de nombres complexes est un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$.

Séries convergentes. On dit qu'une série $A = ((u_n), (s_n))$ est convergente (resp. divergente) si la suite (s_n) est convergente (resp. divergente).

Lorsque la série A est convergente, la limite de la suite (s_n) s'appelle somme de la série A et se note $s(A)$, ou encore $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

$$s(A) = \lim_{p \to +\infty} s_p = \lim_{p \to +\infty} \sum_{n=0}^{p} u_n .$$

On appelle reste à l'ordre p, et on note r_p, ou encore $\sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n$, le nombre complexe $s(A) - s_p$:

$$r_p = \lim_{q \to +\infty} \sum_{n=p+1}^{q} u_n .$$

L'ensemble $\Sigma_c(\mathbf{C})$ des séries convergentes est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\Sigma(\mathbf{C})$, et l'application $s : A \mapsto s(A)$ est une forme linéaire sur $\Sigma_c(\mathbf{C})$.

Condition nécessaire de convergence. Le terme général d'une série convergente converge vers 0.

Critère de Cauchy de convergence des séries. Soit $A = ((u_n), (s_n))$ une série de nombres complexes. Pour que la série A converge, il faut et il suffit que la suite (s_n) soit une suite de Cauchy, c'est-à-dire que, pour tout nombre réel strictement positif ε, il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout couple (p, q) d'entiers naturels tel que $q > p \geqslant n_0$,

$$\left| \sum_{n=p+1}^{q} u_n \right| \leqslant \varepsilon .$$

Séries géométriques. On appelle série géométrique une série A dont le terme général est de la forme (a^n), où $a \in \mathbf{C}$. Pour que la série A converge, il faut et il suffit que $|a| < 1$. Dans ces conditions,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a},$$

et, pour tout entier naturel p,

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} a^n = \frac{a^{p+1}}{1-a} .$$

b) Séries à termes réels positifs

Soit $A = ((u_n), (s_n))$ une série de nombres réels positifs. Pour que la série A converge, il faut et il suffit que la suite (s_n) soit majorée. Plus précisément :

— Ou bien la suite (s_n) est majorée. Alors la série A converge, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbf{N}} s_n .$$

— Ou bien la suite (s_n) n'est pas majorée. Alors s_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Comparaison avec une intégrale. Soient f une fonction définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs réelles positives, décroissante et tendant vers 0 au point $+\infty$, et A la série de terme général $(f(n))$. Pour que la série A converge, il faut et il suffit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Séries de Riemann. Soit α un nombre réel. Pour que la série de terme général $(1/n^\alpha)_{n \geqslant 1}$ converge, il faut et il suffit que α soit strictement supérieur à 1. La série de terme général $(1/n)_{n \geqslant 1}$ est dite harmonique.

Séries de Bertrand. Soient α et β des nombres réels. Pour que la série de terme général $\left(\frac{1}{n^\beta (\ln n)^\alpha}\right)$ converge, il faut et il suffit que $\beta > 1$ ou ($\beta = 1$ et $\alpha > 1$).

Comparaison directe des séries de nombres réels positifs. Soient A et B deux séries de nombres réels positifs, de termes généraux (u_n) et (v_n).

1. Si A est dominée par B, c'est-à-dire si (u_n) est dominée par (v_n), et si B converge, il en est de même de A.
2. Si A et B sont semblables, la convergence de la série A équivaut à celle de la série B.

Règle de Cauchy. Soit (u_n) une suite de nombres réels positifs telle que $(\sqrt[n]{u_n})$ admette une limite β.

Si $\beta < 1$, la série de terme général (u_n) converge.

Si $\beta > 1$, la série de terme général (u_n) diverge.

Règle de Riemann. Soit (u_n) une suite de nombres réels positifs. On suppose qu'il existe un nombre réel α tel que $n^\alpha u_n$ ait une limite β appartenant à $[0, +\infty]$.

Si $\alpha > 1$ et si β est fini, la série de terme général (u_n) converge.

Si $\alpha \leqslant 1$ et si $\beta \neq 0$, la série de terme général (u_n) diverge.

Comparaison logarithmique des séries de nombres réels positifs. Soient A et B deux séries de nombres réels strictement positifs, de termes généraux

(u_n) et (v_n). On suppose qu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Si la série B converge, il en est de même de la série A.

Règle de D'Alembert. Soit (u_n) une suite de nombres réels strictement positifs telle que (u_{n+1}/u_n) admette une limite β.

Si $\beta < 1$, la série de terme général (u_n) converge.

Si $\beta > 1$, la série de terme général (u_n) diverge.

Règle de Raabe-Duhamel. Soit (u_n) une suite de nombres réels strictement positifs telle que u_{n+1}/u_n tende vers 1 par valeurs inférieures et que $n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ admette une limite $\beta \in [0, +\infty]$.

Si $\beta > 1$, la série de terme général (u_n) converge.

Si $\beta < 1$, la série de terme général (u_n) diverge.

c) Convergence absolue et semi-convergence

On dit qu'une série $A = ((u_n), (s_n))$ de nombres complexes est absolument convergente si la série de terme général $(|u_n|)$ est convergente. Dans ce cas, la série A est convergente et

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Pour tout entier naturel p,

$$\left| \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n \right| \leqslant \sum_{n=p+1}^{+\infty} |u_n|.$$

Une série convergente mais non absolument convergente est dite semi-convergente.

Séries alternées. On dit qu'une série $A = ((u_n), (s_n))$ de nombres réels est alternée si la suite $((-1)^n u_n)$ est de signe constant.

Si la suite (u_n) converge vers 0 et si la suite $(|u_n|)$ est décroissante, la série A converge et, pour tout entier naturel p,

$$\left| \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n \right| \leqslant |u_{p+1}|.$$

De plus, le reste à l'ordre p est de même signe que le premier terme négligé, c'est-à-dire u_{p+1}.

2. SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

a) Convergence uniforme des suites de fonctions

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un ensemble E à valeurs complexes.

On dit que (f_n) converge simplement sur E s'il existe une fonction f définie sur E telle que, pour tout point x de E, la suite $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$.

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*,\ \forall x \in E,\ \exists n_0 \in \mathbf{N} : \forall n \geqslant n_0,\quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon .$$

Une telle fonction f est évidemment unique :

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x) .$$

On dit encore que (f_n) converge simplement sur E vers f.

On dit que (f_n) converge uniformément sur E s'il existe une fonction f définie sur E telle que la suite d'éléments de $\overline{\mathbf{R}}$ de terme général

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|$$

converge vers 0 :

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*,\ \exists n_0 \in \mathbf{N} :\quad \forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in E,\quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon .$$

Une telle fonction f est unique, et limite simple de la suite (f_n) ; on dit encore que (f_n) converge uniformément sur E vers f.

Critère de Cauchy de convergence uniforme. Pour que (f_n) converge uniformément sur E, il faut et il suffit que

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*,\ \exists n_0 \in \mathbf{N} :\quad \forall x \in E,\ \forall p \geqslant n_0,\ \forall q \geqslant n_0,\quad |f_p(x) - f_q(x)| \leqslant \varepsilon .$$

Convergence uniforme des suites de fonctions bornées. Soit (f_n) une suite de fonctions convergeant uniformément sur E vers f. Si, pour tout entier naturel n, f_n est bornée, il en est de même de f.

Sur l'espace vectoriel $\mathscr{B}(E, \mathbf{C})$ des fonctions bornées sur E, l'application

$$g \mapsto \| g \|_\infty = \sup_{x \in E} |g(x)|$$

est une norme (dite de la convergence uniforme), et la convergence uniforme sur E équivaut à la convergence en norme.

Muni de cette norme, l'espace vectoriel $\mathscr{B}(E, \mathbf{C})$ est complet.

Limite uniforme de fonctions continues en un point. Soient (f_n) une suite de fonctions définies sur une partie P de $\mathbf{C}$ à valeurs complexes et x_0 un point de P. Si (f_n) converge uniformément sur P (ou, plus généralement, sur toute partie fermée bornée contenue dans P) vers une fonction f et si, pour tout entier naturel n, f_n est continue au point x_0, alors f est continue au point x_0.

L'ensemble $\mathscr{BC}(P, \mathbf{C})$ des fonctions bornées continues sur P est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{B}(P, \mathbf{C})$; muni de la norme induite, $\mathscr{BC}(P, \mathbf{C})$ est complet.

Limite uniforme de fonctions intégrables. Soient $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbf{R}$ et (f_n) une suite de fonctions à valeurs complexes intégrables sur $[a, b]$. Si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f, alors f est intégrable et

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Limite uniforme de fonctions dérivables. Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et (f_n) une suite de fonctions à valeurs complexes continûment dérivables sur I. Si (f_n') converge uniformément sur toute partie fermée bornée contenue dans I vers une fonction g et s'il existe un point x_0 de I tel que $(f_n(x_0))$ converge, alors (f_n) converge uniformément sur toute partie fermée bornée contenue dans I vers une fonction f, f est continûment dérivable et

$$f' = g\,.$$

b) Convergence uniforme des séries de fonctions

On appelle série de fonctions tout couple $A = ((u_n), (s_n))$ constitué de deux suites de fonctions définies sur un ensemble E à valeurs complexes telles que, pour tout entier naturel p,

$$s_p = \sum_{n=0}^{p} u_n\,.$$

On dit que A converge simplement (resp. uniformément) sur E vers une fonction f si la suite (s_n) converge simplement (resp. uniformément) sur E vers f.

Critère de Cauchy de convergence uniforme. Pour que A converge uniformément sur E, il faut et il suffit que

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*,\ \exists n_0 \in \mathbf{N} :\ \forall x \in E,\ \forall p \geqslant n_0,\ \forall q > p,\ \left| \sum_{n=p+1}^{q} u_n(x) \right| \leqslant \varepsilon\,.$$

Convergence normale. On dit qu'une série de fonctions $A=((u_n), (s_n))$ est normalement convergente sur E si la série de terme général $(\| u_n \|_\infty)$ est convergente.

Une série normalement convergente est uniformément convergente sur E, et absolument convergente en tout point de E.

Continuité de la somme d'une série de fonctions. Soient (u_n) une suite de fonctions à valeurs complexes définies sur une partie P de $\mathbf{C}$ et x_0 un point de P. Si la série de terme général (u_n) converge uniformément sur toute partie fermée bornée contenue dans P vers une fonction f et si, pour tout entier naturel n, u_n est continue au point x_0, alors f est continue au point x_0.

Intégrabilité de la somme d'une série de fonctions. Soient $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbf{R}$ et (u_n) une suite de fonctions à valeurs complexes intégrables sur $[a, b]$. Si la série de terme général (u_n) converge uniformément sur $[a, b]$, la série de terme général $\left(\int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t\right)$ est convergente et

$$\int_a^b \left[\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\right] \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Dérivabilité de la somme d'une série de fonctions. Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et (u_n) une suite de fonctions à valeurs complexes continûment dérivables sur I. Si la série de terme général (u_n') est uniformément convergente sur toute partie fermée bornée contenue dans I et s'il existe un point x_0 de I tel que la série de terme général $(u_n(x_0))$ converge, alors la série de terme général (u_n) converge uniformément sur toute partie fermée bornée contenue dans I, sa somme est continûment dérivable et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'\,.$$

3. SÉRIES ENTIÈRES

a) Rayon de convergence

On appelle série entière une série A de fonctions définies sur $\mathbf{C}$ à valeurs complexes dont le terme général (u_n) est de la forme

$$u_n : z \mapsto a_n z^n\,, \qquad a_n \in \mathbf{C}\,.$$

Lemme d'Abel. Soit z_0 un nombre complexe. Si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée, la série entière A est absolument convergente pour tout nombre complexe de module strictement inférieur à $|z_0|$ et uniformément convergente sur tout disque fermé de centre O et de rayon strictement inférieur à $|z_0|$.

Rayon de convergence. L'ensemble des nombres réels positifs ρ tels que la série de terme général $(|a_n| \rho^n)$ converge est un intervalle d'origine 0 : la borne supérieure R de cet intervalle (éventuellement égale à $+\infty$) s'appelle rayon de convergence de la série entière A.

L'ensemble D des nombres complexes z tels que $|z| < R$ s'appelle domaine de convergence ; si $R \in]0, +\infty[$, c'est un disque ouvert, appelé disque de convergence.

Une série entière converge absolument en tout point de D, diverge en tout point extérieur à D et converge uniformément sur toute partie fermée bornée de $\mathbf{C}$ contenue dans D.

La fonction

$$f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

est continue sur D.

Somme et produit de deux séries entières. Soient A et B deux séries entières, (a_n) et (b_n) les suites de leurs coefficients, R_1 et R_2 leurs rayons de convergence.

La série $A + B$ est une série entière ; son rayon de convergence R est tel que

$$R \geqslant \inf(R_1, R_2),$$

avec égalité si $R_1 \neq R_2$.

La série dont le terme général est défini par

$$z \mapsto \left(\sum_{p+q=n} a_p b_q \right) z^n$$

est une série entière, appelée série produit des séries A et B. Son rayon de convergence est supérieur à $\inf(R_1, R_2)$ et, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < \inf(R_1, R_2)$, la somme de la série produit est le produit des sommes de chaque facteur.

b) Dérivation et intégration

Soit A une série entière d'une variable réelle, de terme général $x \mapsto a_n x^n$, de rayon de convergence R et de somme f.

La série entière de terme général $x \mapsto (n+1)\, a_{n+1}\, x^n$ a pour rayon de convergence R, la fonction f est dérivable sur $]-R, R[$ et

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, x^n .$$

La série entière de terme général $x \mapsto \dfrac{a_n}{n+1}\, x^{n+1}$ a pour rayon de convergence R et

$$\int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, t^n \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1} .$$

c) Développement d'une fonction en série entière

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ symétrique par rapport à 0 et f une fonction définie sur I à valeurs complexes. On dit que f est développable en série entière sur I s'il existe une suite (a_n) de nombres complexes telle que

— le domaine de convergence de la série entière de terme général $z \mapsto a_n\, z^n$ contienne I ;
— pour tout point x de I,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n .$$

La fonction f est nécessairement indéfiniment dérivable sur I, la suite (a_n) est unique et, pour tout entier naturel n,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n\,!} .$$

La série entière de terme général

$$x \mapsto \frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}\, x^n$$

s'appelle série de Maclaurin associée à f.

Pour que f soit développable en série entière sur I, il faut et il suffit que le reste de Maclaurin de f à l'ordre n converge simplement vers 0 sur I ; il suffit qu'il existe un nombre réel positif β tel que, pour tout point x de I et pour tout entier naturel n,

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leqslant \beta .$$

Développement en série entière des fonctions rationnelles. Soit f une fonction rationnelle n'admettant pas 0 pour pôle. Alors f est développable en série entière sur l'intervalle $]-R, R[$, où R est le plus petit des modules des pôles de f. De plus, le rayon de convergence du développement en série entière de f est égal à R.

d) Développements en série entière usuels

Fonctions	*Développements en série entière*	*Rayons de convergence*
e^x	$1+\frac{x}{1\,!}+\frac{x^2}{2\,!}+\cdots+\frac{x^n}{n\,!}+\cdots$	$+\infty$
ch x	$1+\frac{x^2}{2\,!}+\frac{x^4}{4\,!}+\cdots+\frac{x^{2r}}{(2r)\,!}+\cdots$	$+\infty$
sh x	$x+\frac{x^3}{3\,!}+\frac{x^5}{5\,!}+\cdots+\frac{x^{2r+1}}{(2r+1)\,!}+\cdots$	$+\infty$
cos x	$1-\frac{x^2}{2\,!}+\frac{x^4}{4\,!}+\cdots+(-1)^r\frac{x^{2r}}{(2r)\,!}+\cdots$	$+\infty$
sin x	$x-\frac{x^3}{3\,!}+\frac{x^5}{5\,!}+\cdots+(-1)^r\frac{x^{2r+1}}{(2r+1)\,!}+\cdots$	$+\infty$
$(1+x)^\alpha$	$1+\frac{\alpha}{1\,!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2\,!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n\,!}x^n+\cdots$	1 $\quad\alpha\in\mathbf{R}$
$\frac{1}{1+x}$	$1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$	1
ln $(1+x)$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$	1
Arg th x	$x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2r+1}}{2r+1}+\cdots$	1
Arc tan x	$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^r\frac{x^{2r+1}}{2r+1}+\cdots$	1
$\sqrt{1+x}$	$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)\,!}{2^{2n-1}(n-1)\,!\,n\,!}x^n+\cdots$	1
$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$	$1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2+\cdots+(-1)^n\frac{(2n)\,!}{2^{2n}(n\,!)^2}x^n+\cdots$	1
Arg sh x	$x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{4\,!}{2^4(2\,!)^2}\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^r\frac{(2r)\,!}{2^{2r}(r\,!)^2}\frac{x^{2r+1}}{2r+1}+\cdots$	1
Arc sin x	$x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{4\,!}{2^4(2\,!)^2}\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{(2r)\,!}{2^{2r}(r\,!)^2}\frac{x^{2r+1}}{2r+1}+\cdots$	1

On déduit de ce tableau les développements limités des fonctions usuelles.

Les développements en série entière des fonctions tangente et tangente hyperbolique font intervenir les nombres de Bernoulli ; les développements à l'ordre 8 de ces fonctions sont les suivants :

$$\operatorname{th} x \equiv x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 \pmod{\mathscr{N}_8}$$

$$\tan x \equiv x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 \pmod{\mathscr{N}_8},$$

où $\mathscr{N}_8$ désigne l'idéal des fonctions négligeables devant $x \mapsto x^8$ au voisinage de 0.

e) Fonctions transcendantes élémentaires complexes

Fonction exponentielle complexe. La fonction $z \mapsto e^z$ est définie sur $\mathbf{C}$ par

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots .$$

Pour tout nombre complexe z,

$$e^{\bar{z}} = \overline{e^z} .$$

Pour tout couple (z, z') de nombres complexes,

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'} .$$

Pour tout entier rationnel n,

$$(e^z)^n = e^{nz} .$$

Pour tout nombre complexe $z = x + iy$, où x et y sont réels,

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

$$|e^z| = e^x \quad \text{et} \quad \operatorname{Arg} e^z \equiv y \pmod{2\pi} .$$

En particulier,

$$e^{i\pi/2} = i , \qquad e^{i\pi} = -1 , \qquad e^{2i\pi} = 1 .$$

L'application $z \mapsto e^z$ est continue périodique, de période $2i\pi$, c'est-à-dire que, pour tout couple (z, z') de nombres complexes, la relation $e^{z'} = e^z$ équivaut à la relation $z' - z \in 2i\pi\mathbf{Z}$. Autrement dit, le noyau du morphisme $z \mapsto e^z$ est $2i\pi\mathbf{Z}$.

Argument d'un nombre complexe non nul

L'application $x \mapsto e^{ix}$ est un morphisme surjectif du groupe additif $\mathbf{R}$ sur le groupe multiplicatif $\mathbf{U}$ des nombres complexes de module 1. Son noyau est l'ensemble des multiples d'un nombre réel strictement positif, noté 2π. Les fonctions $x \mapsto e^{ix}$, $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ ont pour plus petite période 2π.

$$\pi \approx 3{,}141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\ 383\ 279\ 502\ 88...$$

Par passage au quotient, cette application définit un isomorphisme φ du groupe $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ sur le groupe $\mathbf{U}$. L'isomorphisme réciproque de φ s'appelle argument, et se note arg. Le représentant de l'argument d'un élément u de $\mathbf{U}$ appartenant à $]-\pi, \pi]$ s'appelle argument principal de u et se note Arg u.

Soit z un nombre complexe non nul. On appelle argument (resp. argument principal) de z et on note arg z (resp. Arg z) l'argument (resp. l'argument principal) de $z/|z|$.

Pour tout couple (z, z') de nombres complexes non nuls,

$$\arg(zz') = \arg z + \arg z' ,$$

ce qui équivaut à

$$\operatorname{Arg}(zz') \equiv \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} z' \pmod{2\pi} .$$

Il en découle que

$$\arg(1/z) = -\arg z ,$$

et que

$$\arg(z'/z) = \arg z' - \arg z .$$

L'application $z \mapsto e^z$ est une surjection de $\mathbf{C}$ sur $\mathbf{C}^*$. Plus précisément, soit u un nombre complexe non nul ; l'équation $e^z = u$ admet pour solutions les nombres complexes

$$z_k = \ln|u| + i \operatorname{Arg} u + 2i\pi k , \quad \text{où} \quad k \in \mathbf{Z} .$$

Fonctions trigonométriques complexes. Pour tout nombre complexe z,

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\operatorname{ch} iz = \cos z \qquad \operatorname{sh} iz = i \sin z$$

$$\cos iz = \operatorname{ch} z \qquad \sin iz = i \operatorname{sh} z .$$

Pour tout couple (z, z') de nombres complexes,

$$\cos (z + z') = \cos z \cos z' - \sin z \sin z'$$

$$\sin (z + z') = \sin z \cos z' + \cos z \sin z' .$$

Pour tout nombre complexe $z = x + iy$, où x et y sont réels,

$$\cos (x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$$

$$\sin (x + iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y .$$

De plus, pour tout nombre complexe z,

$$\cos \bar{z} = \overline{\cos z} \qquad \sin \bar{z} = \overline{\sin z} .$$

Enfin, pour tout nombre complexe $z = x + iy$,

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x$$

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y .$$

Pour tout couple (z, z') de nombres complexes,

$$\cos z' = \cos z \Leftrightarrow z' \equiv z \pmod{2\pi} \quad \text{ou} \quad z' \equiv -z \pmod{2\pi}$$

$$\sin z' = \sin z \Leftrightarrow z' \equiv z \pmod{2\pi} \quad \text{ou} \quad z' \equiv \pi - z \pmod{2\pi} .$$

Soit z un nombre complexe. Pour que $\cos z = 0$, il faut et il suffit que z appartienne à l'ensemble P des nombres réels congrus à $\pi/2$ modulo π.

L'application $\operatorname{tg} : z \mapsto \sin z / \cos z$ est une application continue de $\mathbf{C} - P$ dans $\mathbf{C}$. L'image de $\mathbf{C} - P$ par cette application est $\mathbf{C} - \{ -i, i \}$. En outre, cette application est périodique de période π. Plus précisément, pour tout couple (z, z') d'éléments de $\mathbf{C} - P$,

$$\operatorname{tg} z' = \operatorname{tg} z \Leftrightarrow z' \equiv z \pmod{\pi} .$$

X. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1. GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Soit E un espace vectoriel normé complet sur $\mathbf{R}$. On appelle équation différentielle du premier ordre une équation de la forme

$$y' = f(x, y),$$

où f est une application continue sur un ouvert U de $\mathbf{R} \times E$ à valeurs dans E.

On appelle solution de cette équation une application φ dérivable sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ à valeurs dans E telle que, pour tout point x de I, $(x, \varphi(x))$ appartienne à U et que

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)).$$

On suppose l'ensemble des solutions ordonné par la relation de prolongement.

Théorème de Cauchy-Lipschitz. Soit (x_0, y_0) un point de U. Si f est continue sur U et localement lipschitzienne en y, il existe une solution maximale φ et une seule telle que

$$\varphi(x_0) = y_0.$$

(On dit que f est localement lipschitzienne en y si, pour tout élément y de E, il existe un nombre réel strictement positif α et un nombre réel positif k tels que, pour tout couple d'éléments de U de la forme $((x, y_1), (x, y_2))$ tel que $\| y_1 - y \| \leqslant \alpha$ et $\| y_2 - y \| \leqslant \alpha$,

$$\| f(x, y_1) - f(x, y_2) \| \leqslant k \| y_1 - y_2 \|.$$

Cette condition est réalisée si E est de dimension finie et si f est de classe C^1 sur U.)

2. INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

a) Intégration d'une forme différentielle exacte

Soient P et Q deux fonctions continûment différentiables sur un ouvert U de $\mathbf{R}^2$ étoilé par rapport à un de ses points, Q ne s'annulant pas, telles que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Il existe alors une fonction f définie sur U telle que

$$\mathrm{d}f = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y.$$

Soit (x_0, y_0) un point de U. La recherche de la solution φ de l'équation différentielle

$$Q(x, y)\,y' + P(x, y) = 0$$

telle que $\varphi(x_0) = y_0$ équivaut à celle de l'équation implicite

$$f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

satisfaisant à la même condition initiale.

Equation à variables séparables. Soient en particulier P et Q deux fonctions d'une variable, Q ne s'annulant pas. L'intégration de l'équation différentielle

$$Q(y)\,y' + P(x) = 0$$

équivaut à celle de l'équation implicite

$$\int_{x_0}^{x} P(t)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(u)\,\mathrm{d}u = 0.$$

(En pratique, on se contente souvent de séparer les variables, c'est-à-dire d'écrire l'équation sous la forme $P(x)\,\mathrm{d}x = -\,Q(y)\,\mathrm{d}y$, et d'égaler des primitives de l'un et l'autre membre.)

b) Equation homogène

Une équation différentielle de la forme

$$y' = f(y/x)$$

se ramène à une équation à variables séparables à l'aide du changement de

fonction $y = tx$:

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}t}{f(t) - t}.$$

Lorsque $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ n'interviennent que par les formes différentielles $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$ et $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$, on peut passer en coordonnées polaires.

c) **Equation linéaire**

Soient a et b deux fonctions à valeurs complexes continues sur un intervalle I de $\mathbf{R}$. Pour tout point x_0 de I et pour tout nombre complexe y_0, l'équation différentielle linéaire

$$y' + a(x)\,y = b(x)$$

admet une solution φ définie sur I et une seule telle que $\varphi(x_0) = y_0$.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène

$$y' + a(x)\,y = 0$$

est la droite engendrée par

$$\varphi_1 : x \mapsto \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

On obtient les solutions de l'équation avec second membre par la méthode de variation des constantes (à moins qu'il existe une solution évidente), en introduisant la fonction $\lambda = y/\varphi_1$:

$$y = \lambda\varphi_1\,, \qquad y' = \lambda'\,\varphi_1 + \lambda\varphi_1'\,.$$

Les termes en λ s'éliminent, et l'on est ramené à une équation à variables séparables. D'où

$$\varphi(x) = \varphi_1(x)\left[\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{\varphi_1(t)}\,\mathrm{d}t + \mu\right].$$

Certaines équations différentielles se ramènent au cas précédent à l'aide de changement de variable ou de fonction, ou par l'échange de x et de y (équations linéaires en x et $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y$).

Equation de Bernoulli :

$$y' + a(x)\,y = b(x)\,y^{\alpha}\,.$$

On se ramène à une équation linéaire grâce au changement d'inconnue $y \mapsto y^{1-\alpha}$.

Equation de Riccati :

$$y' = a(x)\, y^2 + b(x)\, y + c(x)\,.$$

La connaissance d'une solution particulière φ permet de se ramener à une équation différentielle linéaire, grâce au changement d'inconnue

$$y = \varphi + \frac{1}{z}\,.$$

Equation de Lagrange :

$$y = a(y')\, x + b(y')\,.$$

L'introduction du paramètre $m = y'$ conduit à l'équation différentielle linéaire

$$[a(m) - m]\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}m} + a'(m)\, x + b'(m) = 0\,,$$

avec $y = a(m)\, x + b(m)$.

(Lorsque a est l'application identique, l'équation est dite de Clairaut.)

Equations différentielles se ramenant au premier ordre. On ramène au premier ordre les équations différentielles incomplètes du deuxième ordre de la forme

$$f(y, y', y'') = 0$$

en posant $p = y'$; d'où $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$.

Lorsque y' n'intervient que par son carré, on pose $q = y'^2$: d'où

$$y'' = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y}\,.$$

Dans le cas d'une équation homogène en y, y' et y'', on se ramène à une équation de Riccati, en posant $p = \dfrac{y'}{y}$. Alors $\dfrac{y''}{y} = p' + p^2$.

3. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

On appelle système d'équations différentielles linéaires du premier ordre un système d'équations de la forme

$$\begin{cases} y_1' + a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 + \cdots + a_{1n}\, y_n = b_1 \\ y_2' + a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 + \cdots + a_{2n}\, y_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' + a_{n1}\, y_1 + a_{n2}\, y_2 + \cdots + a_{nn}\, y_n = b_n \end{cases}$$

où $(a_{ij})_{i,j \in [1,n]}$ et $(b_i)_{i \in [1,n]}$ sont des familles de fonctions à valeurs complexes continues sur un intervalle I de $\mathbf{R}$.

Pour tout élément x de I, soient $A(x)$ l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ canoniquement associé à la matrice $(a_{ij}(x))$, $\boldsymbol{y}(x)$ et $\boldsymbol{b}(x)$ les vecteurs de $\mathbf{C}^n$ de composants $(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))$ et $(b_1(x), b_2(x), \ldots, b_n(x))$. Le système équivaut à l'équation linéaire

$$\boldsymbol{y}' + A(x).\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}(x)\,, \tag{1}$$

où $A(x).\boldsymbol{y}$ désigne l'image du vecteur $\boldsymbol{y}(x)$ par l'endomorphisme $A(x)$. Pour tout point x_0 de I et pour tout élément $\boldsymbol{y}_0$ de $\mathbf{C}^n$, cette équation admet une solution $\boldsymbol{\varphi}$ définie sur I et une seule telle que $\boldsymbol{\varphi}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée

$$\boldsymbol{y}' + A(x).\boldsymbol{y} = 0$$

est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbf{C}$. Pour que n solutions

$$\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n$$

soient linéairement indépendantes, il faut et il suffit qu'il existe un point x_0 de I en lequel le wronskien de ces fonctions soit non nul :

$$\text{Det}\,(\varphi_{ij}(x_0)) \neq 0\,,$$

où, pour tout élément i de $[1, n]$, $(\varphi_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant n}$ désigne la famille des composants de $\boldsymbol{\varphi}_i$. Dans ces conditions, pour tout point x de I,

$$\text{Det}\,(\varphi_{ij}(x)) \neq 0\,.$$

a) Méthode de variation des constantes

Soit $(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n)$ une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation sans second membre. On obtient les solutions de l'équation avec second membre par la méthode de variation des constantes :

$$\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \boldsymbol{\varphi}_j\,, \qquad \boldsymbol{y}' = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j' \boldsymbol{\varphi}_j + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \boldsymbol{\varphi}_j'\,.$$

D'où

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j' \varphi_{ij} = \boldsymbol{b}_i\,, \qquad i \in [1, n]\,.$$

Pour tout point x de I, il s'agit d'un système de Cramer, définissant les fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ à des constantes additives près.

b) Système d'équations linéaires à coefficients constants

Soit

$$\begin{cases} y_1' + \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 + \cdots + \alpha_{1n} y_n = 0 \\ y_2' + \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2 + \cdots + \alpha_{2n} y_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' + \alpha_{n1} y_1 + \alpha_{n2} y_2 + \cdots + \alpha_{nn} y_n = 0 \end{cases}$$

un système de n équations différentielles linéaires du premier ordre sans second membre. Soient u l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ canoniquement associé à la matrice (α_{ij}), $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de u, $m_1, m_2, \ldots, m_p$ leurs multiplicités. Les solutions sont de la forme

$$\boldsymbol{y}(x) = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{e}^{\lambda_k x} \boldsymbol{Q}_k(x) ,$$

où, pour tout élément k de $[1, p]$, $\boldsymbol{Q}_k$ est un polynôme à coefficients dans le sous-espace caractéristique F_{λ_k} de degré inférieur à $m_k - 1$.

En particulier, si toutes les valeurs propres de u sont simples, les solutions sont données par

$$\boldsymbol{y}(x) = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{c}_k \, \mathrm{e}^{\lambda_k x} , \qquad \boldsymbol{c}_k \in \mathbf{C}^n .$$

En pratique, on peut commencer par chercher une base dans laquelle la matrice associée à u est diagonale ou, à défaut, triangulaire.

On peut aussi employer la méthode des coefficients indéterminés : pour chaque valeur propre λ_k, on écrit le polynôme $\boldsymbol{Q}_k$ le plus général de degré $m_k - 1$ à coefficients dans F_{λ_k} (ce qui introduit m_k^2 coefficients scalaires) et on exprime que $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_k x} \boldsymbol{Q}_k(x)$ est solution. On sait qu'il restera m_k coefficients indéterminés.

c) Equation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants

On appelle équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants une équation de la forme

$$y^{(n)} + \alpha_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = b ,$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ sont des nombres complexes et b une fonction à valeurs complexes continue sur un intervalle I de $\mathbf{R}$.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les racines du polynôme

$$P = X^n + \alpha_{n-1} X^{n-1} + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0 ,$$

$m_1, m_2, \ldots, m_p$ leurs multiplicités. L'espace vectoriel des solutions de l'équation sans second membre est de dimension n ; il est constitué des fonctions

$$y(x) = \sum_{k=1}^{p} e^{\lambda_k x} Q_k(x) ,$$

où, pour tout élément k de $[1, p]$, Q_k est un polynôme à coefficients complexes de degré inférieur à $m_k - 1$.

Equation avec second membre. Cas où b est de la forme $x \mapsto e^{\beta x} R(x)$, où $\beta \in \mathbf{C}$ et $R \in \mathbf{C}[X]$. Soient m la valuation de P au point β et r le degré de R. L'équation admet une solution de la forme $x \mapsto e^{\beta x} S(x)$, où S est un polynôme de degré $m + r$.

On explicite S de la manière suivante : on écrit

$$P(X + \beta) = X^m P_1(X) , \qquad P_1(0) \neq 0$$
$$1 \equiv P_1(X) Q(X) \qquad (\text{mod. } X^{r+1})$$
$$R = D^m R_1 ;$$

alors

$$S = Q(D) R_1 .$$

En particulier, si $r = 0$, c'est-à-dire si b est de la forme $x \mapsto a e^{\beta x}$, $a \in \mathbf{C}$, l'équation admet la solution

$$x \mapsto \frac{a}{P^{(m)}(\beta)} e^{\beta x} x^m .$$

Equation d'Euler :

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} xy' + a_n y = 0 ,$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sont des nombres complexes. Cette équation se ramène à une équation différentielle linéaire à coefficients constants, grâce au changement de variable

$$t = \ln | x | .$$

***d)* Equation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants**

$$y'' + \alpha y' + \beta y = b\,.$$

Si le polynôme

$$P = X^2 + \alpha X + \beta$$

admet des racines distinctes r_1 et r_2, les solutions de l'équation sans second membre sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}\,.$$

Si P admet une racine double r, les solutions sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto e^{rx}(\lambda x + \mu)\,.$$

Equation avec second membre. Soit b une fonction de la forme $x \mapsto e^{\gamma x} R(x)$, où $\gamma \in \mathbf{C}$ et $R \in \mathbf{C}[X]$. L'équation admet une solution de la forme $x \mapsto e^{\gamma x} S(x)$, où $S \in \mathbf{C}[X]$.

$d^0(S) = d^0(R)$ si γ n'est pas racine de P

$d^0(S) = 1 + d^0(R)$ si γ est racine simple de P

$d^0(S) = 2 + d^0(R)$ si γ est racine double de P.

Intégration à l'aide des séries entières. Lorsque les coefficients et le second membre sont des fonctions polynomiales, on peut chercher des solutions sommes de séries entières, en posant

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\,.$$

On obtient ainsi une relation de récurrence entre les coefficients a_n. Il reste à calculer a_n en fonction de n, à calculer le rayon de convergence de la série entière et, si possible, à en calculer la somme.

XI. GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE ET CINÉMATIQUE

1. PROPRIÉTÉS AFFINES DES COURBES

a) Arcs paramétrés

Soit A un espace affine attaché à un espace vectoriel normé E de dimension 2 ou 3 sur $\mathbf{R}$.

On appelle arc paramétré de classe C^k un couple (I, f) constitué d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ et d'une application f de classe C^k de I dans A. L'ensemble $f(I)$ s'appelle support de l'arc paramétré.

On dit que deux arcs paramétrés (I_1, f_1) et (I_2, f_2) de classe C^k se déduisent l'un de l'autre par changement de paramètre s'il existe un C^k-difféomorphisme φ de I_2 sur I_1 tel que

$$f_2 = f_1 \circ \varphi .$$

La relation binaire ainsi définie est une relation d'équivalence ; les classes d'équivalence s'appellent arcs géométriques de classe C^k.

Si l'on impose à φ d'être strictement croissante, on obtient encore une relation d'équivalence ; les classes d'équivalence s'appellent arcs géométriques orientés de classe C^k.

Tangente. Soit (I, f) un arc paramétré de classe C^1. On dit qu'un point $M_0 = f(t_0)$ est régulier si $f'(t_0) \neq \mathbf{0}$.

On appelle tangente à l'arc paramétré en un point régulier $M_0 = f(t_0)$ la droite affine passant par M_0 ayant pour vecteur directeur $f'(t_0)$.

Plus généralement, si (I, f) est de classe C^k et si toutes les dérivées de f au point t_0 ne sont pas nulles, on appelle tangente au point $M_0 = f(t_0)$ la droite affine définie par M_0 et le premier vecteur dérivé non nul au point t_0.

(Plus généralement encore, on appelle tangente au point $M_0 = f(t_0)$ la limite de la droite passant par M_0 et $M = f(t)$ lorsque t tend vers t_0.)

Les notions de point régulier et de tangente sont invariantes dans un changement de paramètre.

La tangente en un point régulier $M_0 = f(t_0)$ est l'ensemble des points P tels que

$$\boldsymbol{M_0P} = \lambda \boldsymbol{f}'(t_0)\,, \qquad \lambda \in \mathbf{R}\,.$$

En coordonnées cartésiennes,

$$\boldsymbol{OM} = f(t)\,\boldsymbol{i} + g(t)\,\boldsymbol{j} + h(t)\,\boldsymbol{k}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda f'(t_0) \\ y = y_0 + \lambda g'(t_0) \\ z = z_0 + \lambda h'(t_0)\,. \end{cases}$$

Plan osculateur. Soit (I, f) un arc paramétré de classe C^k. Si tous les vecteurs dérivés au point t_0 ne sont pas colinéaires, on appelle plan osculateur au point $M_0 = f(t_0)$ le plan affine passant par M_0 dont la direction est définie par les deux premiers vecteurs dérivés $f^{(p)}(t_0)$ et $f^{(q)}(t_0)$ non colinéaires.

(Plus généralement, on appelle plan osculateur au point M_0 la limite du plan passant par la tangente en M_0 et $M = f(t)$ lorsque t tend vers t_0.)

Si $p = 1$ et $q = 2$, l'équation cartésienne du plan osculateur est

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ f'(t_0) & g'(t_0) & h'(t_0) \\ f''(t_0) & g''(t_0) & h''(t_0) \end{vmatrix} = 0\,.$$

En coordonnées cylindriques, si ρ et z sont des fonctions de θ,

$$\begin{vmatrix} X - \rho(\theta_0) & Y & Z - z(\theta_0) \\ \rho'(\theta_0) & \rho(\theta_0) & z'(\theta_0) \\ \rho''(\theta_0) - \rho(\theta_0) & 2\,\rho'(\theta_0) & z''(\theta_0) \end{vmatrix} = 0\,.$$

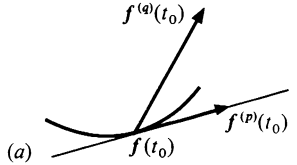
Normale. Lorsque A est un espace affine euclidien de dimension 3, on appelle plan normal en un point régulier M_0 le plan affine passant par M_0 perpendiculaire à la tangente en M_0 ; ce plan a pour équation cartésienne

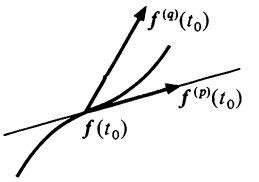
$$(x - x_0)\,f'(t_0) + (y - y_0)\,g'(t_0) + (z - z_0)\,h'(t_0) = 0\,.$$

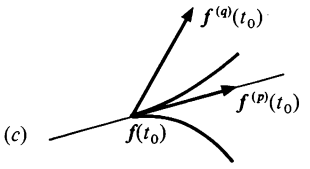
De même, lorsque A est un plan euclidien, on appelle normale en M_0 la droite affine passant par M_0 perpendiculaire à la tangente en M_0.

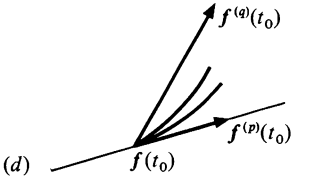
b) Cas des courbes planes

Position d'un arc par rapport à la tangente en un point. Soient (I, f) un arc paramétré, $f^{(p)}(t_0)$ et $f^{(q)}(t_0)$ les deux premiers vecteurs dérivés non colinéaires au point t_0.









a) p impair, q pair	allure générale
b) p impair, q impair	point d'inflexion
c) p pair, q impair	point de rebroussement de première espèce
d) p pair, q pair	point de rebroussement de seconde espèce.

Concavité, points d'inflexion. Courbe d'équation $y = \varphi(x)$. La concavité est tournée vers les y positifs si $\varphi'' \geqslant 0$. En tout point d'inflexion, $\varphi''(x) = 0$.

Arc paramétré $\boldsymbol{OM} = f(t)\,\boldsymbol{i} + g(t)\,\boldsymbol{j}$. La concavité est tournée vers les y positifs si

$$\frac{f'\,g'' - g'\,f''}{f'^3} \geqslant 0\,,$$

vers la normale orientée si $f'\,g'' - g'\,f'' \geqslant 0$.

Point d'inflexion :

$$f'\,g'' - g'\,f'' = 0\,.$$

Points doubles. Si

$$x = \frac{P(t)}{Q(t)}, \qquad y = \frac{R(t)}{S(t)}, \qquad P, Q, R, S \in \mathbf{R}[X],$$

on obtient les coordonnées des points doubles en écrivant que les polynômes $P - xQ$ et $R - yS$ ont deux racines communes. En particulier, si P, Q, R et S sont de degré inférieur à 2, les coefficients de $P - xQ$ et $R - yS$ sont proportionnels.

Courbes définies par une équation implicite $f(x, y) = 0$. En un point M_0 de coordonnées (x_0, y_0) où l'un au moins des deux nombres $f'_x(x_0, y_0)$ et $f'_y(x_0, y_0)$ est non nul, la tangente a pour équation

$$(x - x_0) f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0) f'_y(x_0, y_0) = 0 .$$

Si le plan affine A est euclidien, la normale en M_0 a pour équation

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} .$$

2. PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES COURBES

a) **Courbes définies par une équation polaire** $\rho = f(\theta)$. Si $f(\theta_0) = 0$, la tangente en O a pour équation $\theta = \theta_0$.

On suppose désormais $\rho_0 = f(\theta_0) \neq 0$.

Tangente :

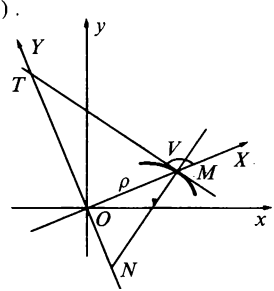
$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} \cos(\theta - \theta_0) + \left(\frac{1}{\rho}\right)'_0 \sin(\theta - \theta_0) .$$

Normale :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} \cos(\theta - \theta_0) + \frac{1}{\rho'_0} \sin(\theta - \theta_0) .$$

Sous-tangente polaire : $\overline{OT} = -\rho^2/\rho'$.
Sous-normale polaire : $\overline{ON} = \rho'$.

$\tan V = \rho/\rho'$.



Concavité, points d'inflexion. La concavité est tournée vers O si

$$u(u + u'') \geqslant 0 \qquad u = 1/\rho .$$

Les points d'inflexion sont définis par

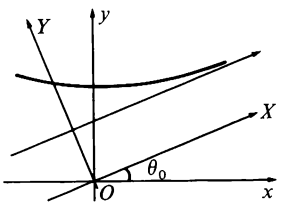
$$\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = 0$$

ou

$$u + u'' = 0 .$$

Asymptotes. Lorsque la direction asymptotique est Ox (resp. Oy), on cherche la limite de $y = \rho \sin\theta$ (resp. $x = \rho \cos\theta$). On ramène le cas général au premier cas à l'aide d'une rotation des axes. L'asymptote a pour équation dans le nouveau repère

$$Y = \lim_{\theta \to \theta_0} \rho \sin(\theta - \theta_0) .$$



Points doubles. Les points doubles autres que O sont définis par

$$f(\theta + 2k\pi) = f(\theta) \qquad k \in \mathbf{Z}^*$$

ou

$$f(\theta + (2k + 1)\pi) = -f(\theta) \qquad k \in \mathbf{Z} .$$

b) Arcs rectifiables

Soit (I, f) un arc paramétré, où $I = [a, b]$. Pour tout élément

$$S = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$$

de l'ensemble $\mathscr{S}$ des subdivisions de I, on pose

$$L_f(I, S) = \sum_{i=0}^{n-1} \| f(t_{i+1}) - f(t_i) \| .$$

On appelle longueur de (I, f), et on note $L_f(I)$, la borne supérieure (dans $\overline{\mathbf{R}}$) des nombres réels $L_f(I, S)$:

$$L_f(I) = \sup_{S \in \mathscr{S}} L_f(I, S) .$$

Lorsque $L_f(I) < +\infty$, on dit que l'arc paramétré (I, f) est rectifiable.

Les notions de longueur et d'arc rectifiable sont invariantes par changement de paramètre.

Soit (I, f) un arc rectifiable, où $I = [a, b]$. Pour tout intervalle fermé borné I_1 contenu dans I, le sous-arc défini par I_1 est rectifiable et

$$L_f(I_1) \leqslant L_f(I) .$$

Pour tout élément c de $[a, b]$

$$L_f([a, b]) = L_f([a, c]) + L_f([c, b]) .$$

Soit (I, f) un arc paramétré, où I est un intervalle quelconque. On dit que cet arc est rectifiable si, pour tout intervalle fermé borné I_1 contenu dans I, le sous-arc défini par I_1 est rectifiable.

Soit t_0 un élément de I. On appelle abscisse curviligne d'origine $f(t_0)$ la fonction s définie sur I par

$$\begin{aligned} s(t) &= L_f([t_0, t]) \quad \text{si} \quad t \geqslant t_0 \\ &= -L_f([t, t_0]) \quad \text{si} \quad t < t_0 . \end{aligned}$$

La fonction s est continue et strictement croissante.

Tout arc paramétré (I, f) de classe C^1 est rectifiable et, pour tout couple (a, b) de points de I,

$$L_f([a, b]) = \int_a^b \| f'(t) \| \, dt .$$

Dans le plan :

$$\begin{aligned} ds^2 &= (1 + \varphi'^2(x)) \, dx^2 \quad \text{si } y = \varphi(x) \\ &= dx^2 + dy^2 \end{aligned}$$

$$= d\rho^2 + \rho^2\, d\theta^2 \qquad \text{en coordonnées polaires}$$

$$= dz\, d\bar{z}\,, \qquad \text{où } z \text{ est l'affixe de } M$$

$$ds = -(p + p'')\, d\theta\,,$$

où $x \cos\theta + y \sin\theta - p(\theta) = 0$ est l'équation eulérienne de la tangente en M ;

$$\begin{cases} dx = \cos\alpha\, ds \\ dy = \sin\alpha\, ds \end{cases}$$

où α est l'angle de Ox avec la tangente orientée ;

$$\begin{cases} d\rho = \cos V\, ds \\ \rho\, d\theta = \sin V\, ds \end{cases}$$

où $V = \alpha - \theta$.

Dans l'espace :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$= d\rho^2 + \rho^2\, d\theta^2 + dz^2 \qquad \text{en coordonnées cylindriques}$$

$$= dr^2 + r^2\, d\varphi^2 + r^2 \cos^2\varphi\, d\theta^2 \qquad \text{en coordonnées sphériques.}$$

c) **Courbure et torsion des courbes gauches**

Trièdre de Frenet :

$$\boldsymbol{t} = \frac{d\boldsymbol{OM}}{ds}\,, \quad \boldsymbol{n} \text{ vecteur unitaire de } \frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\,, \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n}\,.$$

Formules de Frenet :

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \dfrac{\boldsymbol{n}}{R} \\ \dfrac{d\boldsymbol{n}}{ds} = -\dfrac{\boldsymbol{t}}{R} + \dfrac{\boldsymbol{b}}{T} \\ \dfrac{d\boldsymbol{b}}{ds} = -\dfrac{\boldsymbol{n}}{T} \end{cases}$$

R rayon de courbure, $c = 1/R$ courbure
T rayon de torsion, $\tau = 1/T$ torsion.

Calcul de R et de T. Lorsque $\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{f}(t)$, où le paramètre t n'est pas nécessairement l'abscisse curviligne, R et T sont donnés par les relations

$$R = \frac{\| \boldsymbol{f}'(t) \|^3}{\| \boldsymbol{f}'(t) \times \boldsymbol{f}''(t) \|}, \quad T = \frac{\| \boldsymbol{f}'(t) \times \boldsymbol{f}''(t) \|^2}{\text{Det}\,(\boldsymbol{f}'(t), \boldsymbol{f}''(t), \boldsymbol{f}'''(t))}.$$

Le centre de courbure C est défini par $\boldsymbol{MC} = R\boldsymbol{n}$.

***d*) Courbure des courbes planes**

$\boldsymbol{t} = \mathrm{d}\boldsymbol{OM}/\mathrm{d}s$, $\boldsymbol{n}$ vecteur unitaire tel que $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}) = \pi/2$.

Calcul de R :

$$R = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\alpha}$$

$$= \frac{(1 + \varphi'^2(x))^{3/2}}{\varphi''(x)} \qquad \text{si } y = \varphi(x)$$

$$= \frac{(f'^2(t) + g'^2(t))^{3/2}}{f'(t)\,g''(t) - g'(t)\,f''(t)} \qquad \text{si } x = f(t),\ y = g(t)$$

$$= \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''} \qquad \text{en coordonnées polaires}$$

$$= \frac{(u^2 + u'^2)^{3/2}}{u^3(u + u'')} \qquad \text{où } u = 1/\rho$$

$$= -(p + p''),$$

où $x \cos\theta + y \sin\theta - p(\theta) = 0$ est l'équation eulérienne de la tangente en M.

A l'origine des coordonnées,

$$R = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{2y} \quad \text{si la tangente est } Ox, \qquad R = \lim_{y \to 0} \frac{y^2}{2x} \quad \text{si la tangente est } Oy.$$

Le centre de courbure C est défini par $\boldsymbol{MC} = R\boldsymbol{n}$:

$$\begin{cases} x_C = x_M - R \sin\alpha = x_M - \dfrac{\mathrm{d}y_M}{\mathrm{d}\alpha} \\ y_C = y_M + R \cos\alpha = y_M + \dfrac{\mathrm{d}x_M}{\mathrm{d}\alpha}. \end{cases}$$

En coordonnées polaires, les coordonnées de C dans le repère mobile sont

$$\begin{cases} X_C = \rho - R \sin V = \rho \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\alpha} \\ Y_C = R \cos V = \dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\alpha}. \end{cases}$$

Lorsque la tangente en M est écrite sous forme eulérienne,

$$z_M = (p + ip')\,e^{i\theta}, \qquad z_C = i(p' + ip'')\,e^{i\theta}.$$

On appelle développée l'ensemble des centres de courbure.

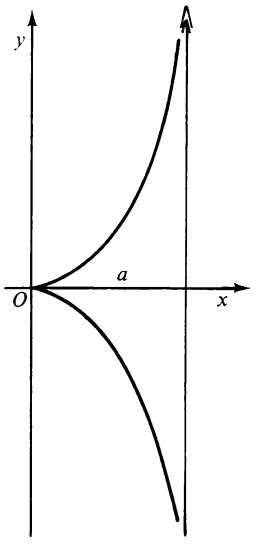
c) **Courbes classiques**

Cissoïde droite

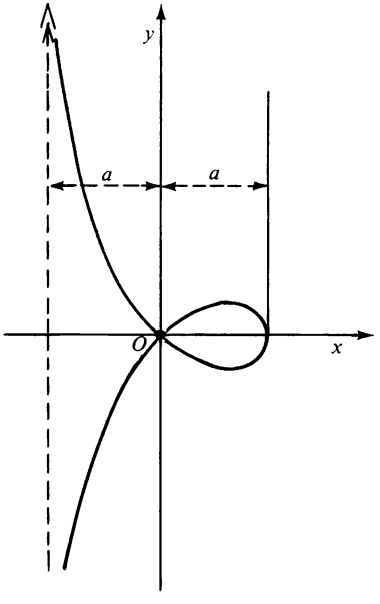
$$x(x^2 + y^2) - ay^2 = 0 \qquad \rho = a\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}.$$

Strophoïde droite

$$x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0 \qquad \rho = a\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}.$$



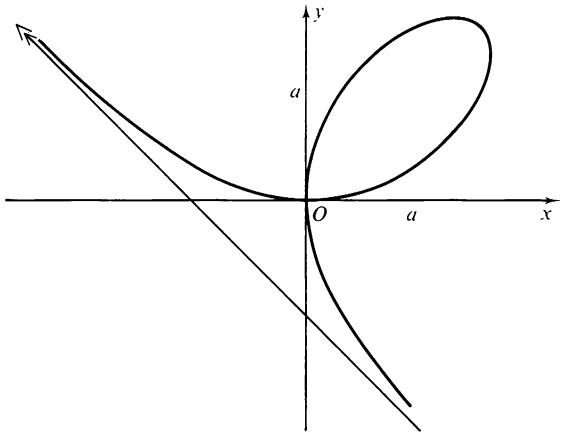
Cissoïde droite.



Strophoïde droite.

Folium de Descartes

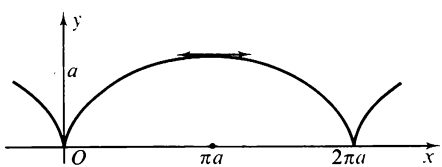
$$x^3 + y^3 - 3\,axy = 0 \qquad x = \frac{3\,at}{1 + t^3} \quad y = tx\,.$$



Cycloïde

$$x = a(t - \sin t) \qquad y = a(1 - \cos t)$$

$$\mathrm{d}s = 2\,a \sin \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t \qquad R = -\,4\,a \sin \frac{t}{2}\,.$$

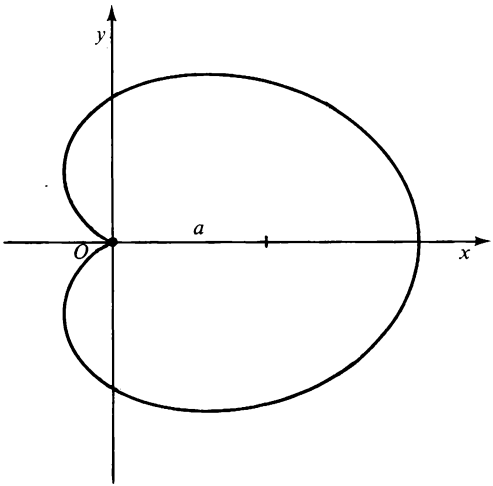


Cycloïde.

Cardioïde

$$\rho = a(1 + \cos\theta) \qquad ds = 2a\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$dV = \frac{1}{2}\,d\theta \qquad R = \frac{4a}{3}\cos\frac{\theta}{2}.$$



Cardioïde.

Astroïde

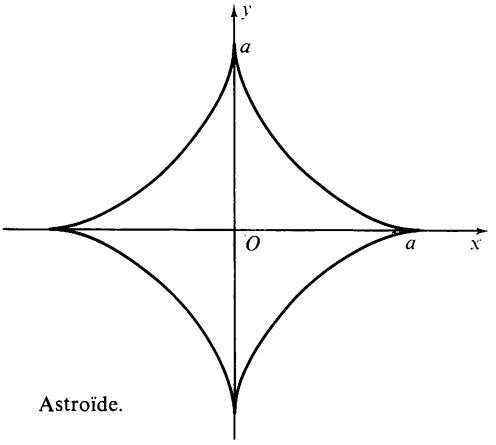
$$x = a\cos^3 t \qquad y = a\sin^3 t$$

$$ds = 3a\sin t\cos t\,dt \qquad R = -3a\sin t\cos t.$$

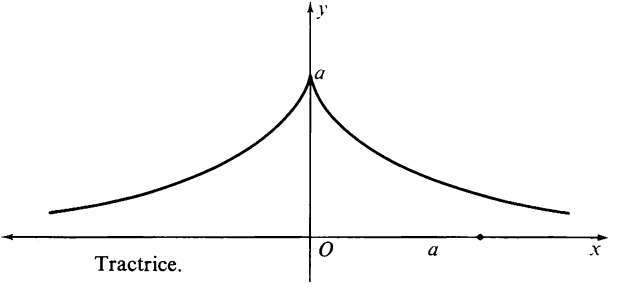
Tractrice

$$x = a\left(\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + \cos t\right) \qquad y = a\sin t$$

$$ds = a\cot t\,dt \qquad R = a\cot t.$$



Astroïde.



Tractrice.

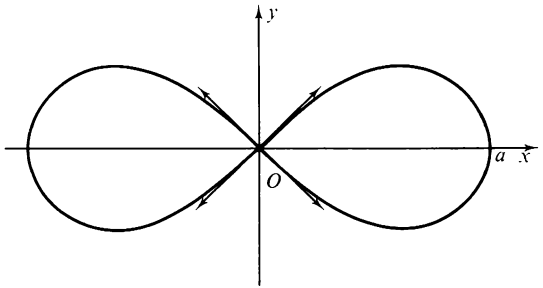
Lemniscate de Bernoulli

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}\,.$$

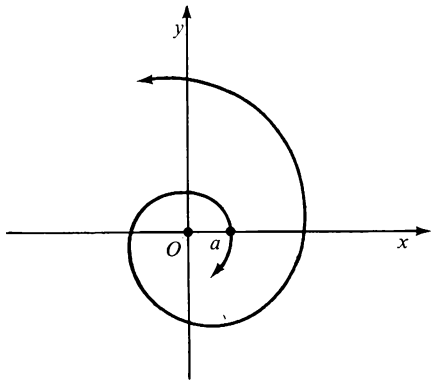
Spirale logarithmique

$$\rho = a\,e^{m\theta} \qquad ds = \sqrt{1 + m^2}\,\rho\,d\theta$$

$$\tan V = \frac{1}{m} \qquad R = \sqrt{1 + m^2}\,\rho$$



Lemniscate de Bernoulli.



Spirale logarithmique.

f) **Hélice**

On dit qu'un arc géométrique gauche de classe C^1 dont tous les points sont réguliers est une hélice si ses tangentes forment un angle constant avec une direction fixe.

Les hélices d'un cylindre de révolution relativement à l'axe de ce cylindre sont dites circulaires ; elles admettent des équations en coordonnées cylindriques de la forme

$$\rho = a \qquad z = b\theta$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{a^2 + b^2}\,\mathrm{d}\theta \qquad R = \frac{a^2 + b^2}{a} \qquad T = \frac{a^2 + b^2}{b}.$$

3. CINÉMATIQUE

a) Cinématique du point

Soit A un espace affine attaché à un espace vectoriel euclidien de dimension 2 ou 3. On appelle mouvement d'un point de A un arc paramétré (I, f). Le paramètre s'appelle temps et le support, trajectoire :

$$\text{Vitesse} \quad \boldsymbol{V} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}t}. \quad \text{Accélération} \quad \boldsymbol{\Gamma} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}.$$

Dans le repère de Frenet

$$\boldsymbol{V} = v\boldsymbol{t}, \quad \boldsymbol{\Gamma} = \dot{v}\boldsymbol{t} + \frac{v^2}{R}\boldsymbol{n}, \quad \text{où} \quad v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$

En coordonnées cartésiennes dans le plan

$$\boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{V} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{\Gamma} = \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j}$$

En coordonnées polaires

$$\boldsymbol{OM} = \rho\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{V} = \dot{\rho}\boldsymbol{u} + \rho\dot{\theta}\boldsymbol{u}_1$$
$$\boldsymbol{\Gamma} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\,\boldsymbol{u} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho^2\,\dot{\theta})\,\boldsymbol{u}_1$$

En coordonnées cartésiennes dans l'espace

$$\boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{V} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{\Gamma} = \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j} + \ddot{z}\boldsymbol{k}.$$

En coordonnées cylindriques

$$\boldsymbol{OM} = \rho\boldsymbol{u} + z\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{V} = \dot{\rho}\boldsymbol{u} + \rho\dot{\theta}\boldsymbol{u}_1 + \dot{z}\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{\Gamma} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\,\boldsymbol{u} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho^2\,\dot{\theta})\,\boldsymbol{u}_1 + \ddot{z}\boldsymbol{k}$$

où $\boldsymbol{u}_1 = \mathrm{d}\boldsymbol{u}/\mathrm{d}\theta$.

Mouvement circulaire. Trajectoire : cercle.
En coordonnées polaires

$$\boldsymbol{OM} = a\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{OM} = a\dot{\theta}\boldsymbol{u}_1 \quad \text{où} \quad \boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{\Gamma} = -\dot{\theta}^2\,\boldsymbol{OM} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{OM} = -a\dot{\theta}^2\,\boldsymbol{u} + a\ddot{\theta}\boldsymbol{u}_1.$$

Mouvement uniforme si $\omega = \dot{\theta}$ est constant :

$$\boldsymbol{V} = a\omega \boldsymbol{u}_1 , \qquad \boldsymbol{\Gamma} = - a\omega^2 \boldsymbol{u} .$$

Mouvement hélicoïdal. Trajectoire : hélice circulaire.

$$\boldsymbol{OM} = a\boldsymbol{u} + b\theta \boldsymbol{k} , \quad \boldsymbol{V} = a\dot{\theta}\boldsymbol{u}_1 + b\dot{\theta}\boldsymbol{k} , \quad \boldsymbol{\Gamma} = - a\dot{\theta}^2 \boldsymbol{u} + a\ddot{\theta}\boldsymbol{u}_1 + b\ddot{\theta}\boldsymbol{k} .$$

Mouvement uniforme si $\omega = \dot{\theta}$ est constant :

$$\boldsymbol{V} = a\omega \boldsymbol{u}_1 + b\omega \boldsymbol{k} , \qquad \boldsymbol{\Gamma} = - a\omega^2 \boldsymbol{u} .$$

Mouvement à accélération centrale. Le support du vecteur accélération passe toujours par O si et seulement si le vecteur

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{OM} \times \boldsymbol{V}$$

est constant.

$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{0}$ Dans tout intervalle où M n'est pas en O, la trajectoire est portée par une droite.

$\boldsymbol{G} \neq \boldsymbol{0}$ La trajectoire est contenue dans un plan passant par O et parcourue suivant la loi des aires.

Loi des aires dans le plan :

$$C = x\dot{y} - y\dot{x} = \rho^2 \dot{\theta}$$

C constante des aires ; $\frac{1}{2} C$ vitesse aréolaire.

Formules de Binet :

$$v^2 = C^2(u^2 + u'^2) , \qquad \gamma = - C^2 u^2 (u + u'') ,$$

où $u = 1/\rho$, $u' = \mathrm{d}u/\mathrm{d}\theta$, $u'' = \mathrm{d}^2u/\mathrm{d}\theta^2$, $\boldsymbol{\Gamma} = \gamma \mathbf{u}$.

b) Cinématique du solide

Soient A un espace affine attaché à un espace vectoriel euclidien E de dimension 3 et I un intervalle de $\mathbf{R}$. On appelle mouvement d'un solide de A une application f de classe C^2 de $I \times A$ dans A satisfaisant à la condition suivante : pour tout élément t de I, l'application $\boldsymbol{g}_t : M \mapsto \boldsymbol{f}(t, M)$ est une isométrie de A.

Pour tout point M de A, l'application $t \mapsto M_t = \boldsymbol{g}_t(M) = \boldsymbol{f}(t, M)$ est un arc paramétré, appelé mouvement du point M. Le point M_t s'appelle position de M à l'instant t.

Pour tout couple (P, Q) de points de A,

$$\boldsymbol{P_t Q_t} = u_t(\boldsymbol{PQ}) ,$$

où u_t est la rotation vectorielle associée à $\boldsymbol{g}_t$.

Soient $\boldsymbol{x}$ un vecteur de E et (P, Q) un bipoint représentant $\boldsymbol{x}$. Alors $\boldsymbol{P_t Q_t} = u_t(\boldsymbol{x})$ est indépendant du représentant considéré. L'application $t \mapsto u_t(\boldsymbol{x})$ s'appelle mouvement du vecteur $\boldsymbol{x}$.

Pour tout élément t de I, le champ de vecteurs

$$\boldsymbol{V} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{g}_t}{\mathrm{d}t} \circ \boldsymbol{g}_t^{-1}$$

est équiprojectif ; on l'appelle torseur cinématique. Pour tout point M de A, $\boldsymbol{V}(M_t)$ est la vitesse du point M à l'instant t.

On suppose désormais l'espace vectoriel euclidien E orienté. Soient $\boldsymbol{\Omega}$ le vecteur du torseur $\boldsymbol{V}$ et h son invariant scalaire :

$$\forall t \in I , \quad \forall \boldsymbol{x} \in E , \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_t(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\Omega} \times u_t(\boldsymbol{x})$$

$$\forall t \in I , \quad \forall P \in A , \quad \forall Q \in A , \qquad \boldsymbol{V}(Q_t) = \boldsymbol{V}(P_t) + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{P_t Q_t} .$$

Mouvements tangents. On dit que les mouvements de deux solides sont tangents à un instant t_0 si leurs champs de vitesses à cet instant sont égaux.

Si $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{0}$, le mouvement est tangent à un mouvement de translation uniforme.

Si $\boldsymbol{\Omega} \neq \boldsymbol{0}$ et si $h = 0$, le mouvement est tangent à un mouvement de rotation uniforme.

Si $\boldsymbol{\Omega} \neq \boldsymbol{0}$ et si $h \neq 0$, le mouvement est tangent à un mouvement hélicoïdal uniforme.

Vecteur rotation. Le vecteur $\boldsymbol{\Omega}$ s'appelle vecteur instantané de rotation. Si $\boldsymbol{\Omega} \neq \boldsymbol{0}$, le nombre réel $\dfrac{h}{\| \boldsymbol{\Omega} \|^2}$ s'appelle pas instantané, le vecteur $\dfrac{h}{\| \boldsymbol{\Omega} \|^2} \boldsymbol{\Omega}$ vitesse instantanée de glissement, et l'axe du torseur cinématique, axe instantané de rotation et de glissement (ou, plus simplement, axe instantané de rotation lorsque $h = 0$).

c) Composition des mouvements

Composition des vitesses :

$$\boldsymbol{V}_a = \boldsymbol{V}_e + \boldsymbol{V}_r ,$$

V_a vitesse absolue,
V_e vitesse d'entraînement (vitesse du point coïncidant),
V_r vitesse relative.

Composition des accélérations :

$$\Gamma_a = \Gamma_e + \Gamma_r + \Gamma_c ,$$

Γ_a accélération absolue,
Γ_e accélération d'entraînement (accélération du point coïncidant),
Γ_r accélération relative,
Γ_c accélération complémentaire, ou de Coriolis : $\Gamma_c = 2\,\Omega \times V_r$.

4. PROPRIÉTÉS DES SURFACES

a) Nappes paramétrées

Soit A un espace affine attaché à un espace vectoriel normé E de dimension 3 sur $\mathbf{R}$.

On appelle nappe paramétrée de classe C^k un couple (D, f) constitué d'un domaine (i.e. un ouvert connexe) D de $\mathbf{R}^2$ et d'une application f de classe C^k de D dans A. L'ensemble $f(D)$ s'appelle support de la nappe paramétrée.

On dit que deux nappes paramétrées (D_1, f_1) et (D_2, f_2) de classe C^k se déduisent l'une de l'autre par changement de paramètre s'il existe un C^k-difféomorphisme φ de D_2 sur D_1 tel que

$$f_2 = f_1 \circ \varphi .$$

La relation binaire ainsi définie est une relation d'équivalence ; les classes d'équivalence s'appellent nappes géométriques de classe C^k.

Si l'on impose à φ d'avoir un jacobien strictement positif, on obtient encore une relation d'équivalence ; les classes d'équivalence s'appellent nappes géométriques orientées de classe C^k.

Plan tangent. Soit (D, f) une nappe paramétrée de classe C^1. On dit qu'un point $M_0 = f(m_0)$ est régulier si l'application linéaire $\mathrm{d}_{m_0} f$ tangente à f en ce point est de rang 2.

On appelle plan tangent à la nappe paramétrée en un point régulier $M_0 = f(m_0)$ le plan affine passant par M_0 ayant pour direction l'image de $\mathrm{d}_{m_0} f$.

Les notions de point régulier et de plan tangent sont invariantes dans un changement de paramètre.

On appelle arc d'une nappe paramétrée $S = (D, \boldsymbol{f})$ un arc paramétré γ de la forme $(I, \boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})$, où $(I, \boldsymbol{g})$ est un arc paramétré de $\mathbf{R}^2$ dont le support est contenu dans D. Soit t un point de I. Si $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ sont de classe C^1, si le point $\boldsymbol{g}(t)$ est régulier sur $(I, \boldsymbol{g})$ et si le point $M = (\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})\ (t)$ est régulier sur $(D, \boldsymbol{f})$, le point M est régulier sur γ, et la tangente en M à γ est contenue dans le plan tangent en M à S.

Lorsque $\boldsymbol{g}$ est l'injection $u \mapsto (u, v)$ ou $v \mapsto (u, v)$ de I dans la partie D de $\mathbf{R}^2$, γ s'appelle courbe coordonnée.

Le plan tangent à S au point $M_0 = \boldsymbol{f}(m_0)$, où $m_0 = (u_0, v_0)$, est l'ensemble des points P tels que

$$\boldsymbol{M_0P} = \lambda \boldsymbol{f}'_u(m_0) + \mu \boldsymbol{f}'_v(m_0)\,, \qquad \lambda, \mu \in \mathbf{R}\,.$$

En coordonnées cartésiennes.

$$\boldsymbol{OM} = f(u, v)\,\boldsymbol{i} + g(u, v)\,\boldsymbol{j} + h(u, v)\,\boldsymbol{k}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda f'_u(m_0) + \mu f'_v(m_0) \\ y = y_0 + \lambda g'_u(m_0) + \mu g'_v(m_0) \\ z = z_0 + \lambda h'_u(m_0) + \mu h'_v(m_0) \end{cases}$$

ou

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ f'_u(m_0) & g'_u(m_0) & h'_u(m_0) \\ f'_v(m_0) & g'_v(m_0) & h'_v(m_0) \end{vmatrix} = 0\,.$$

Si $z = f(x, y)$, le plan tangent au point de coordonnées $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ a pour équation

$$z - z_0 = (x - x_0)\, f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)\, f'_y(x_0, y_0)\,.$$

Si la nappe est définie de manière implicite par

$$f(x, y, z) = 0\,,$$

en un point M_0 de coordonnées (x_0, y_0, z_0) où l'un au moins des trois nombres $f'_x(x_0, y_0, z_0)$, $f'_y(x_0, y_0, z_0)$, $f'_z(x_0, y_0, z_0)$ est non nul, le plan tangent a pour équation

$$(x-x_0) f'_x(x_0, y_0, z_0) + (y-y_0) f'_y(x_0, y_0, z_0) + (z-z_0) f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0\,.$$

Normale. On suppose que l'espace affine A est euclidien. On appelle normale en un point régulier $M_0 = \boldsymbol{f}(m_0)$ à une nappe paramétrée S la perpendiculaire passant par M_0 au plan tangent à S en M_0.

La normale admet pour vecteur directeur $\boldsymbol{f}'_u(m_0) \times \boldsymbol{f}'_v(m_0)$. Dans le

cas d'une nappe définie de manière implicite, la normale a pour équations

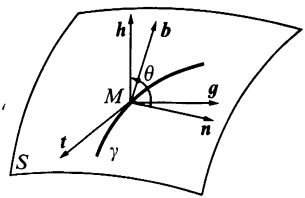
$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{f'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

b) Trièdre de Darboux-Ribaucour

On suppose que l'espace affine A est euclidien. Soient $S = (D, f)$ une nappe paramétrée, $\gamma = (I, f \circ f_1)$ un arc de cette nappe, $M = (f \circ f_1)(t)$ un point ordinaire sur γ et sur S, et $\boldsymbol{h}$ le vecteur unitaire normal à S en M. On appelle trièdre de Darboux-Ribaucour en M le trièdre orthonormal direct $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h})$, où $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{h} \times \boldsymbol{t}$. Soit θ la fonction angulaire associée au vecteur unitaire $t \mapsto \boldsymbol{h}(t)$ dans la base orthonormale $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$. Le trièdre de Darboux-Ribaucour se déduit du trièdre de Frenet en M par la rotation ayant pour axe la tangente orientée à γ en M et dont l'angle a pour mesure $\theta - \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{cases} \boldsymbol{h} = \cos\theta\, \boldsymbol{n} + \sin\theta\, \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{g} = \boldsymbol{h} \times \boldsymbol{t} = -\cos\theta\, \boldsymbol{b} + \sin\theta\, \boldsymbol{n}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{n} = \sin\theta\, \boldsymbol{g} + \cos\theta\, \boldsymbol{h} \\ \boldsymbol{b} = -\cos\theta\, \boldsymbol{g} + \sin\theta\, \boldsymbol{h}. \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\boldsymbol{g}}{R_g} + \dfrac{\boldsymbol{h}}{R_n} \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{g}}{\mathrm{d}s} = -\dfrac{\boldsymbol{t}}{R_g} + \dfrac{\boldsymbol{h}}{T_g} \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}}{\mathrm{d}s} = -\dfrac{\boldsymbol{t}}{R_n} - \dfrac{\boldsymbol{g}}{T_g} \end{cases}$$

$$c_n = \frac{1}{R_n} = \frac{\cos\theta}{R} = c\cos\theta \qquad \text{courbure normale}$$

$$c_g = \frac{1}{R_g} = \frac{\sin\theta}{R} = c\sin\theta \qquad \text{courbure géodésique}$$

$$\tau_g = \frac{1}{T_g} = \frac{1}{T} + \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \tau + \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} \qquad \text{torsion géodésique}.$$

c) Formes quadratiques fondamentales

On suppose encore que A est euclidien. Soient $S = (D, f)$ une nappe paramétrée, $M_0 = f(m_0)$ un point régulier sur S et P l'image de $\mathrm{d}_{m_0} f$.

On appelle première forme quadratique fondamentale au point M_0 la restriction Q_1 à P de la forme quadratique $\boldsymbol{x} \mapsto \| \boldsymbol{x} \|^2$.

L'endomorphisme s de P défini par les relations

$$s\left(\frac{\partial M}{\partial u}\right) = -\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial u} \qquad s\left(\frac{\partial M}{\partial v}\right) = -\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial v}$$

est symétrique. On appelle seconde forme quadratique fondamentale au point M_0 la forme quadratique Q_2 sur P associée à S, c'est-à-dire telle que $Q_2(\boldsymbol{x}) = s(\boldsymbol{x}).\boldsymbol{x}$.

Les deux formes quadratiques fondamentales sont invariantes dans un changement de paramètre.

Pour tout vecteur $\boldsymbol{x} = \xi \dfrac{\partial M}{\partial u} + \eta \dfrac{\partial M}{\partial v}$ de P,

$$Q_1(\boldsymbol{x}) = E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2 ,$$

où

$$E = \left\| \frac{\partial M}{\partial u} \right\|^2 \qquad F = \frac{\partial M}{\partial u} \cdot \frac{\partial M}{\partial v} \qquad G = \left\| \frac{\partial M}{\partial v} \right\|^2 .$$

Le nombre $EG - F^2$ est strictement positif.

$$H = \sqrt{EG - F^2} = \left\| \frac{\partial M}{\partial u} \times \frac{\partial M}{\partial v} \right\| .$$

De même,

$$Q_2(\boldsymbol{x}) = L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2 ,$$

où

$$L = -\frac{\partial M}{\partial u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial u} = \frac{1}{H} \operatorname{Det}\left(\frac{\partial^2 M}{\partial u^2}, \frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial v}\right)$$

$$M = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial M}{\partial u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial v} + \frac{\partial M}{\partial v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial u}\right) = \frac{1}{H} \operatorname{Det}\left(\frac{\partial^2 M}{\partial u\, \partial v}, \frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial v}\right)$$

$$N = -\frac{\partial M}{\partial v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial v} = \frac{1}{H} \operatorname{Det}\left(\frac{\partial^2 M}{\partial v^2}, \frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial v}\right).$$

Pour tout arc tracé sur S passant par M_0,

$$\mathrm{d}s^2 = E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2 .$$

La courbure normale est donnée par la relation

$$c_n = -\left(\frac{\partial M}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial M}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial \boldsymbol{h}}{\mathrm{d}v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right),$$

ce qui conduit à écrire

$$c_n = -\frac{\mathrm{d}M.\mathrm{d}\boldsymbol{h}}{\|\,\mathrm{d}M\,\|^2} = \frac{L\,\mathrm{d}u^2 + 2M\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + N\,\mathrm{d}v^2}{E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2}.$$

On appelle courbure principale toute valeur propre de s. On appelle direction principale toute droite admettant pour vecteur directeur un vecteur propre de s.

Les directions principales sont déterminées par

$$\begin{vmatrix} L\xi + M\eta & E\xi + F\eta \\ M\xi + N\eta & F\xi + G\eta \end{vmatrix} = 0.$$

Lorsque s admet une valeur propre double, toute direction est principale ; on dit alors que M_0 est un ombilic. Cette condition revient à dire que la torsion géodésique est nulle dans toutes les directions tangentes en M_0 à S.

Lorsque s admet deux valeurs propres distinctes c_1 et c_2, il existe deux directions principales, lesquelles sont orthogonales. Le produit $c_1\,c_2$ s'appelle courbure totale. La demi-somme de c_1 et c_2 s'appelle courbure moyenne ; c'est la demi-somme des courbures en M_0 des sections de S par deux plans normaux perpendiculaires.

d) Courbes remarquables tracées sur une surface

Asymptotiques : arcs à courbure normale nulle. Ce sont encore les arcs de la nappe tels qu'en tout point le plan osculateur soit tangent à la surface :

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}t^2}.\boldsymbol{h} = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}}{\mathrm{d}t} = 0.$$

(La deuxième définition s'étend au cas où l'espace affine A n'est pas nécessairement euclidien.)

$$L\,\mathrm{d}u^2 + 2M\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + N\,\mathrm{d}v^2 = 0.$$

Lignes de courbure : arcs à torsion géodésique nulle. La normale à la nappe en M est tangente à un même arc paramétré :

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{0}.$$

Si on remplace le vecteur unitaire $\boldsymbol{h}$ par un vecteur normal quelconque $\boldsymbol{v}$,

$$\text{Det}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}t}, \boldsymbol{v}, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right) = 0 .$$

$$(FL - EM)\,\mathrm{d}u^2 + (GL - EN)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + (GM - FN)\,\mathrm{d}v^2 = 0 .$$

Géodésiques : arcs à courbure géodésique nulle. Le plan osculateur est normal à la surface :

$$\text{Det}\left(\boldsymbol{h}, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right) = 0 .$$

$$\begin{cases} \mathrm{d}(E\,\mathrm{d}u + F\,\mathrm{d}v) - \dfrac{1}{2}(E'_u\,\mathrm{d}u^2 + 2\,F'_u\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G'_u\,\mathrm{d}v^2) = 0 \\ \mathrm{d}(F\,\mathrm{d}u + G\,\mathrm{d}v) - \dfrac{1}{2}(E'_v\,\mathrm{d}u^2 + 2\,F'_v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G'_v\,\mathrm{d}v^2) = 0 . \end{cases}$$

XII. COMPLÉMENTS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

1. GRADIENT, DIVERGENCE, ROTATIONNEL

Gradient. Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension finie, U un ouvert de E et f une fonction numérique différentiable sur U. La différentielle de f s'identifie à un champ de vecteurs, appelé gradient de f et noté grad f.

Soit $B = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ une base orthonormale de E. Alors

$$\operatorname{grad} f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \boldsymbol{e}_j .$$

En coordonnées cylindriques.

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \boldsymbol{u} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \boldsymbol{u}_1 + \frac{\partial f}{\partial z} \boldsymbol{k} .$$

Divergence. Soient A un espace affine attaché à un espace vectoriel normé E de dimension finie sur $\mathbf{R}$, U un ouvert de A et V un champ de vecteurs différentiable sur U. La fonction numérique définie sur U qui à tout point $\boldsymbol{x}$ associe la trace de $\mathrm{d}_{\boldsymbol{x}} V$ s'appelle divergence de V et se note div V.

Soit $B = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ une base de E. Le champ V s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $V = \sum_{j=1}^{n} P_j \boldsymbol{e}_j$. Alors $\operatorname{div} V = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial P_j}{\partial x_j}$.

En coordonnées cylindriques si $V = L\boldsymbol{u} + M\boldsymbol{u}_1 + N\boldsymbol{k}$,

$$\operatorname{div} V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho L) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial M}{\partial \theta} + \frac{\partial N}{\partial z} .$$

Rotationnel. Soient A un espace affine attaché à un espace vectoriel euclidien orienté E de dimension 3, U un ouvert de A et V un champ de vecteurs différentiable sur U. Pour tout point $\boldsymbol{x}$ de U, la composante antisymétrique de $u = \mathrm{d}_{\boldsymbol{x}} V$ $\left(\text{c'est-à-dire } \frac{u - u^*}{2}\right)$ s'identifie à un vecteur de E. L'application qui à $\boldsymbol{x}$ associe le double du vecteur ainsi défini s'appelle rotationnel de V et se note rot V.

Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormale directe de E. Le champ V s'écrit sous la forme $V = Pe_1 + Qe_2 + Re_3$. Alors rot V a pour composants :

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

En coordonnées cylindriques,

$$\text{rot } V = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial N}{\partial \theta} - \frac{\partial M}{\partial z}\right)\boldsymbol{u} + \left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{u}_1 + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho M) - \frac{\partial L}{\partial \theta}\right)\boldsymbol{k}.$$

$\forall \boldsymbol{u} \in E$, $\text{div}(V \times \boldsymbol{u}) = (\text{rot } V).\boldsymbol{u} - V.(\text{rot } \boldsymbol{u})$

$\text{div}(\text{rot } V) = 0$

$\text{rot}(\text{grad } f) = \boldsymbol{0}$

$\text{grad}(fg) = f \text{ grad } g + g \text{ grad } f$

$\text{div}(fV) = f \text{ div } V + (\text{grad } f).V$

$\text{rot}(fV) = f(\text{rot } V) + (\text{grad } f) \times V$

$\text{div}(V \times W) = (\text{rot } V).W - V.(\text{rot } W)$

$$\text{div}(\text{grad } f) = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \quad \Delta f \text{ laplacien de } f$$

$\text{rot}(\text{rot } V) = \text{grad}(\text{div } V) - \Delta V$, $\Delta V = (\Delta P, \Delta Q, \Delta R)$.

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad \text{en coordonnées cylindriques}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} - \frac{\tan \varphi}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

en coordonnées sphériques.

2. CALCUL DES INTÉGRALES DOUBLES ET DES INTÉGRALES TRIPLES

a) Intégrales doubles

Intégrale sur un rectangle. Soient $[a, b]$ et $[a', b']$ deux intervalles fermés bornés de $\mathbf{R}$, R leur produit cartésien et f une fonction numérique continue sur R. Alors

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \int_{a'}^{b'}\left(\int_a^b f(x, y)\,dx\right)dy = \int_a^b\left(\int_{a'}^{b'} f(x, y)\,dy\right)dx.$$

Lorsque f est le produit de deux fonctions d'une variable,

$$f(x, y) = g(x)\, h(y)\,,$$

l'intégrale double de f est le produit de deux intégrales simples :

$$\iint_R g(x)\, h(y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \left(\int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x\right)\left(\int_{a'}^{b'} h(y)\, \mathrm{d}y\right).$$

Intégrale sur une partie quarrable. On dit qu'une partie bornée Q de $\mathbf{R}^2$ est quarrable s'il existe un rectangle $R = [a, b] \times [a', b']$ contenant Q tel que la fonction caractéristique χ_Q de Q soit intégrable sur R. L'intégrale $\iint_R \chi_Q$ ne dépend pas du rectangle R considéré ; on l'appelle aire de Q. L'intersection, la réunion et la différence de deux parties quarrables sont encore des parties quarrables.

On dit qu'une fonction numérique f définie et bornée sur une partie quarrable Q est intégrable sur Q s'il existe un rectangle $R=[a, b]\times[a', b']$ contenant Q tel que la fonction $\tilde{f}$ obtenue en prolongeant f par 0 soit intégrable sur R. L'intégrale $\iint_R \tilde{f}$ ne dépend pas du rectangle considéré ; on l'appelle intégrale de f sur Q et on la note $\iint_Q f$, ou $\iint_Q f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.

Soit P une partie quarrable contenue dans Q telle que l'aire de $Q - P$ soit nulle. Alors f est intégrable sur P si et seulement si f est intégrable sur Q ; dans ces conditions,

$$\iint_P f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \iint_Q f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,.$$

Soient φ et ψ deux fonctions numériques continues sur un intervalle $[a, b]$ telles que $\varphi \leqslant \psi$ et Q l'ensemble des points de coordonnées (x, y) tels que $x \in [a, b]$, $y \in [\varphi(x), \psi(x)]$. La partie Q est quarrable et, pour toute fonction numérique f continue sur Q,

$$\iint_Q f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x\,.$$

Changement de variable. Soient U et V deux ouverts quarrables de $\mathbf{R}^2$, (g, h) un difféomorphisme de V sur U et f une fonction numérique continue

sur U. Alors

$$\iint_U f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_V f[g(u, v), h(u, v)]\,|\,J\,|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,,$$

où J est le jacobien $\mathrm{D}(g, h)/\mathrm{D}(u, v)$.

Passage en coordonnées polaires :

$$\iint_U f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_V f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,|\,\rho\,|\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,.$$

b) Intégrales triples

Intégrale sur un pavé. Soient $[a, b]$, $[a', b']$ et $[a'', b'']$ trois intervalles fermés bornés de $\mathbf{R}$, P leur produit cartésien et f une fonction numérique continue sur P. Alors

$$\iiint_P f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{a''}^{b''} \left(\iint_R f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z\,,$$

où $R = [a, b] \times [a', b']$.

Lorsque f est le produit de trois fonctions d'une variable,

$$f(x, y, z) = g(x)\,h(y)\,k(z)\,,$$

l'intégrale triple de f est le produit de trois intégrales simples :

$$\iiint_P g(x)\,h(y)\,k(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \right) \left(\int_{a'}^{b'} h(y)\,\mathrm{d}y \right) \left(\int_{a''}^{b''} k(z)\,\mathrm{d}z \right).$$

Intégrale sur une partie cubable. On dit qu'une partie bornée Q de $\mathbf{R}^3$ est cubable s'il existe un pavé $P = [a, b] \times [a', b'] \times [a'', b'']$ contenant Q tel que la fonction caractéristique χ_Q de Q soit intégrable sur P. L'intégrale $\iint_P \chi_Q$ ne dépend pas du pavé considéré ; on l'appelle volume de Q.

On dit qu'une fonction numérique f définie et bornée sur une partie cubable Q est intégrable sur Q s'il existe un pavé P contenant Q tel que la fonction $\tilde{f}$ obtenue en prolongeant f par 0 soit intégrable sur P. L'intégrale $\iint_P \tilde{f}$ ne dépend pas du pavé considéré ; on l'appelle intégrale de f sur Q et on la note $\iiint_Q f$, ou encore $\iiint_Q f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

Soient φ et ψ deux fonctions numériques continues sur une partie quarrable fermée K de $\mathbf{R}^2$ telles que $\varphi \leqslant \psi$ et Q l'ensemble des points de coordonnées (x, y, z) tels que $(x, y) \in K$ et $z \in [\varphi(x), \psi(x)]$. La partie Q est cubable et, pour toute fonction numérique f continue sur Q,

$$\iiint_Q f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_K \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dx\, dy .$$

Changement de variable. Soient U et V deux ouverts cubables de $\mathbf{R}^3$, (g, h, k) un difféomorphisme de V sur U et f une fonction numérique continue sur U. Alors

$$\iiint_U f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_V f[g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)] \mid J \mid du\, dv\, dw ,$$

où J est le jacobien $D(g, h, k)/D(u, v, w)$.

Passage en coordonnées cylindriques :

$$\iiint_U f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_V f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta, z) \mid \rho \mid d\rho\, d\theta\, dz .$$

Passage en coordonnées sphériques :

$$\iiint_U f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_V f(r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r^2 \mid \cos\varphi \mid dr\, d\theta\, d\varphi .$$

3. INTÉGRALE D'UNE FORME DIFFÉRENTIELLE

a) Formes différentielles

Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbf{R}$, U un ouvert de E et p un entier naturel non nul. On appelle forme différentielle de degré p sur U une application ω de U dans l'espace vectoriel $\mathscr{A}_p(E)$ des formes p-linéaires alternées sur E. (En particulier, une forme différentielle de degré 1 est une application de U dans le dual E^* de E.) La valeur de ω en un point $\boldsymbol{x}$ de U se note $\omega_{\boldsymbol{x}}$.

On appelle produit d'une forme différentielle ω sur U par une fonction numérique f définie sur U, et on note $f\omega$, la forme différentielle $\boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})\, \omega_{\boldsymbol{x}}$.

On appelle produit extérieur de deux formes différentielles ω et ω' de degré 1, et on note $\omega \wedge \omega'$, la forme différentielle de degré 2

$$\boldsymbol{x} \mapsto \omega_{\boldsymbol{x}} \wedge \omega'_{\boldsymbol{x}} .$$

On appelle produit extérieur de trois formes différentielles ω, ω' et ω'' de degré 1, et on note $\omega \wedge \omega' \wedge \omega''$, la forme différentielle de degré 3

$$x \mapsto \omega_x \wedge \omega'_x \wedge \omega''_x .$$

Soit $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour tout élément j de $[1, n]$, on note dx_j la différentielle de la j-ième forme linéaire coordonnée e_j^* ; autrement dit, dx_j est l'application $x \mapsto e_j^*$.

Toute forme différentielle ω de degré 1 s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} P_j \, dx_j .$$

Toute forme différentielle ω de degré 2 s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme

$$\omega = \sum_{i<j} P_{ij} \, dx_i \wedge dx_j .$$

Toute forme différentielle ω de degré 3 s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme

$$\omega = \sum_{i<j<k} P_{ijk} \, dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k .$$

En particulier, si $n = 2$, toute forme différentielle de degré 2 s'écrit

$$\omega = P \, dx \wedge dy .$$

Si $n = 3$, les formes différentielles de degré 2 et de degré 3 s'écrivent respectivement

$$\omega = P \, dy \wedge dz + Q \, dz \wedge dx + R \, dx \wedge dy , \quad \omega = P \, dx \wedge dy \wedge dz .$$

***b*) Formes différentielles de degré 1**

Pour toute fonction numérique g différentiable sur U, la différentielle de g est une forme différentielle de degré 1.

Si E est muni d'une base,

$$dg = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j} \, dx_j .$$

Différentiation extérieure. Il existe une application linéaire d et une seule, appelée différentiation extérieure, de l'espace vectoriel des formes

différentielles de degré 1 dans l'espace vectoriel des formes différentielles de degré 2 telle que, pour toute fonction numérique f différentiable sur U,

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = 0$$

et que, pour tout couple (f, g) de fonctions différentiables sur U,

$$\mathrm{d}(f\,\mathrm{d}g) = \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}g\,.$$

Si E est muni d'une base,

$$\mathrm{d}\left(\sum_{j=1}^{n} P_j\,\mathrm{d}x_j\right) = \sum_{i<j}\left(\frac{\partial P_j}{\partial x_i} - \frac{\partial P_i}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j\,.$$

Lorsque $n = 2$,

$$\mathrm{d}(P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\,.$$

Lorsque $n = 3$,

$$\mathrm{d}(P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\,.$$

(Si l'espace vectoriel E est euclidien orienté, $\mathrm{d}\omega$ s'identifie au rotationnel de (P, Q, R).)

Forme différentielle exacte. On dit qu'une forme différentielle ω continue sur U est exacte s'il existe une fonction numérique g continûment différentiable sur U telle que

$$\omega = \mathrm{d}g\,.$$

Une telle fonction g s'appelle potentiel scalaire.

On dit qu'une forme différentielle ω de classe C^1 sur U est fermée si

$$\mathrm{d}\omega = 0\,.$$

Si ω est exacte, ω est fermée. La réciproque est vraie lorsque l'ouvert U est étoilé (théorème de Poincaré).

(Lorsque l'espace vectoriel E est euclidien, une forme différentielle ω s'identifie à un champ de vecteurs $\boldsymbol{V}$. Ainsi, pour que $\boldsymbol{V}$ soit le gradient d'une fonction différentiable sur un ouvert étoilé, il faut et il suffit que $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V} = \boldsymbol{0}$.)

Soit $\omega = \sum_{j=1}^{n} P_j \, dx_j$ une forme différentielle fermée sur un cône ouvert de sommet O de $\mathbf{R}^n$. Si les fonctions P_j sont homogènes de degré $\alpha \neq -1$, alors $\omega = dg$, où

$$g = \frac{1}{\alpha + 1} \sum_{j=1}^{n} x_j P_j .$$

Intégrale d'une forme différentielle de degré 1. Soient Γ un arc géométrique orienté de classe C^1 d'origine A et d'extrémité B, dont le support est contenu dans U, et ω une forme différentielle continue sur U.

Soit $([a, b], f)$ une représentation paramétrique de Γ. L'intégrale

$$\int_a^b \omega_{f(t)}(f'(t)) \, dt$$

ne dépend pas de la représentation paramétrique considérée ; on l'appelle intégrale de ω sur l'arc géométrique orienté Γ et on la note $\int_\Gamma \omega$.

Soit $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} P_j \, dx_j , \qquad f = \sum_{j=1}^{n} f_j e_j$$

et

$$\int_\Gamma \omega = \int_a^b \left[\sum_{j=1}^{n} P_j (f(t)) f_j'(t) \right] dt .$$

Lorsque la forme différentielle ω est exacte, c'est-à-dire s'il existe une fonction numérique g continûment différentiable sur U telle que $\omega = dg$,

$$\int_\Gamma \omega = g(B) - g(A) .$$

En particulier, lorsque l'origine et l'extrémité de Γ sont confondues, l'intégrale de ω est nulle.

(Lorsque l'espace vectoriel E est euclidien, la forme différentielle ω s'identifie à un champ de vecteurs V. L'intégrale de ω sur Γ s'appelle alors travail, ou circulation, de V le long de Γ.)

c) Formes différentielles de degré 2

Différentiation extérieure. Il existe une application linéaire d et une seule, appelée différentiation extérieure, de l'espace vectoriel des formes différentielles de degré 2 dans l'espace vectoriel des formes différentielles de degré 3 telle que, pour toute forme différentielle α de degré 1,

$$d(d\alpha) = 0$$

et que, pour tout triplet (f, g, h) de fonctions numériques différentiables sur U,

$$d(f\,dg \wedge dh) = df \wedge dg \wedge dh .$$

Si E est muni d'une base,

$$d\left(\sum_{i<j} P_{ij}\,dx_i \wedge dx_j\right) = \sum_{i<j} dP_{ij} \wedge dx_i \wedge dx_j .$$

Lorsque $n = 3$,

$$d(P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz .$$

(Lorsque l'espace vectoriel E est euclidien, $d\omega$ s'identifie à la divergence de (P, Q, R).)

Forme différentielle exacte. On dit qu'une forme différentielle ω de degré 2 est exacte s'il existe une forme différentielle α de degré 1 telle que

$$\omega = d\alpha .$$

On dit qu'une forme différentielle ω de degré 2 est fermée si $d\omega = 0$.

Si ω est exacte, ω est fermée. La réciproque est vraie lorsque l'ouvert U est étoilé.

(Lorsque l'espace vectoriel E est euclidien orienté, α et ω s'identifient à des champs de vecteurs $\boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{W}$. Le champ $\boldsymbol{V}$ s'appelle potentiel vecteur. Pour que $\boldsymbol{W}$ soit le rotationnel d'un champ de vecteurs continûment différentiable sur un ouvert étoilé U, il faut et il suffit que div $\boldsymbol{W} = 0$.)

Intégrale d'une forme différentielle de degré 2. Soient U un ouvert d'un espace vectoriel euclidien orienté E de dimension 3, Σ une nappe géométrique orientée de classe C^1 dont le support est contenu dans U, et ω une

forme différentielle de degré 2 continue sur U. La forme différentielle ω s'identifie à un champ de vecteurs V.

Soient (D, f) une représentation paramétrique de Σ et Δ l'image par f d'une partie quarrable Q de $\mathbf{R}^2$ contenue dans D. L'intégrale double

$$\iint_Q \mathrm{Det}\,(V, f'_u, f'_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

ne dépend pas de la représentation paramétrique considérée ; on l'appelle intégrale de ω sur Δ (ou intégrale de surface), et on la note $\displaystyle\iint_\Delta \omega$.

(L'intégrale $\displaystyle\iint_\Delta \omega$ s'appelle encore flux du champ de vecteurs V à travers Δ.)

d) Intégrale d'une forme différentielle de degré 3

Soient U un ouvert de $\mathbf{R}^3$, Q une partie cubable de $\mathbf{R}^3$ contenue dans U et $\omega = P\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ une forme différentielle continue sur U. On appelle intégrale de ω sur Q et on note $\displaystyle\iiint_Q \omega$ l'intégrale de P sur Q :

$$\iiint_Q P\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = \iiint_Q P\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

e) Formule de Stokes

Formule de Green-Riemann. Soient E un plan euclidien orienté et K une partie convexe fermée bornée de E, limitée par une courbe fermée ∂K de classe C^1 par morceaux orientée dans le sens direct. Soit ω une forme différentielle de degré 1 sur un ouvert U de E contenant K. Alors

$$\iint_K \mathrm{d}\omega = \int_{\partial K} \omega\,.$$

Lorsque E est muni d'une base orthonormale directe,

$$\iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \int_{\partial K} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y\,.$$

Formule de Stokes. Soit Σ une nappe géométrique orientée d'un espace vectoriel euclidien E de dimension 3. Soit K une partie du support de Σ qui est l'image par une représentation paramétrique (D, f) d'une partie convexe fermée bornée K' de $\mathbf{R}^2$ contenue dans D. L'image par f du bord $\partial K'$ est un lacet orienté de E indépendant de la représentation paramétrique considérée ; on l'appelle bord orienté de K et on le note ∂K.

Soit ω une forme différentielle de degré 1 sur un ouvert U de E contenant K. Alors

$$\iint_K \mathrm{d}\omega = \int_{\partial K} \omega .$$

Lorsque E est muni d'une base orthonormale,

$$\iint_K \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \int_{\partial K} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z .$$

(Autrement dit, le flux de rot V à travers K est égal au travail de V le long de ∂K.)

Formule d'Ostrogradski. Soient E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et K une partie convexe fermée bornée de E, limitée par une surface fermée ∂K de classe C^1 orientée vers l'extérieur. Soit ω une forme différentielle de degré 2 sur un ouvert U de E contenant K. Alors

$$\iiint_K \mathrm{d}\omega = \iint_{\partial K} \omega .$$

Lorsque E est muni d'une base orthonormale directe,

$$\iiint_K \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = \iint_{\partial K} P\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y .$$

(Autrement dit, l'intégrale de la divergence d'un champ de vecteurs V dans K est égale au flux de V à travers ∂K.)

4. APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DES INTÉGRALES MULTIPLES

a) Aires

Dans le plan. Aire d'une partie quarrable Q limitée par un lacet orienté Γ :

$$A = \iint_Q \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{Q'} \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_\Gamma x\,\mathrm{d}y = -\int_\Gamma y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_\Gamma x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_\Gamma x^2\,\mathrm{d}t\,, \quad \text{où} \quad t = y/x$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Gamma \mathrm{Im}\,(\bar{z}\,\mathrm{d}z) \quad \text{où } z \text{ est l'affixe de } M$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Gamma'} \rho^2\,\mathrm{d}\theta \qquad \text{en coordonnées polaires}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\Gamma''} p(p + p')\,\mathrm{d}\theta$$

où $x\cos\theta + y\sin\theta - p(\theta) = 0$ est l'équation eulérienne de la tangente en M.

Dans l'espace. Elément d'aire d'une nappe paramétrée $(D, \boldsymbol{f})$:

$$\mathrm{d}\sigma = \left\| \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.$$

Cas d'une nappe d'équation $z = f(x, y)$:

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Aire d'une surface de révolution d'axe Oz définie par une méridienne d'équation $\rho = f(z)$:

$$A = 2\pi\int_{z_1}^{z_2} \rho\,\mathrm{d}s\,, \quad \text{où} \quad \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \mathrm{d}z^2\,.$$

b) **Volumes**

Volume d'une partie cubable Q :

$$V = \iiint_Q dx\, dy\, dz$$

$$= \iint_D z\, dx\, dy \quad \text{si } Q \text{ est limitée par } z = 0 \text{ et } z = f(x, y)$$

$$= \iiint_{Q'} \rho\, d\rho\, d\theta\, dz \qquad \text{en coordonnées cylindriques}$$

$$= \iiint_{Q''} r^2 \cos\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi \qquad \text{en coordonnées sphériques .}$$

Volume compris entre deux plans parallèles à xOy :

$$V = \int_{z_1}^{z_2} A(z)\, dz \quad \text{où } A(z) \text{ est l'aire de la section de cote } z .$$

Si A est une fonction polynomiale de degré inférieur à 3,

$$V = \frac{z_2 - z_1}{6} \left[A(z_1) + A(z_2) + 4\, A\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) \right]$$

(formule des trois niveaux).

Volume limité par une surface de révolution d'axe Oz définie par une méridienne d'équation $\rho = f(z)$:

$$V = \pi \int_{z_1}^{z_2} \rho^2\, dz .$$

c) **Masses**

Masse d'un fil : $M = \int_\Gamma \mu(P)\, ds$, μ densité linéique

Masse d'une plaque : $M = \iint_\Sigma \mu(P)\, d\sigma$, μ densité surfacique

Masse d'un solide : $M = \iiint_Q \mu(P)\, dv$, μ densité volumique .

Centre d'inertie.

Centre d'inertie d'un fil : $\boldsymbol{OG} = \frac{1}{M} \int_{\Gamma} \mu(P)\, \boldsymbol{OP}\, \mathrm{d}s$

Centre d'inertie d'une plaque : $\boldsymbol{OG} = \frac{1}{M} \iint_{\Sigma} \mu(P)\, \boldsymbol{OP}\, \mathrm{d}\sigma$

Centre d'inertie d'un solide : $\boldsymbol{OG} = \frac{1}{M} \iiint_{Q} \mu(P)\, \boldsymbol{OP}\, \mathrm{d}v$.

Théorèmes de Guldin. L'aire de la zone engendrée par un arc géométrique plan en tournant autour d'une droite de son plan ne le traversant pas est égale au produit de la longueur de cet arc et de celle du cercle décrit par son centre d'inertie géométrique (la densité linéique étant égale à 1) :

$$A = 2\,\pi x_G\, L\,.$$

Le volume du solide engendré par une plaque plane en tournant autour d'une droite de son plan ne la traversant pas est égal au produit de l'aire de la plaque et de la longueur du cercle décrit par son centre d'inertie géométrique (la densité surfacique étant égale à 1) :

$$V = 2\,\pi x_G\, A\,.$$

Moment d'inertie :

$$I = \iiint_{Q} \mu(P)\, r^2(P)\, \mathrm{d}v\,,$$

où r est la distance à un point, à une droite, à un plan.

$$I_O = \iiint_{Q} \mu(P)\,(x^2 + y^2 + z^2)\, \mathrm{d}v = I_{yOz} + I_{zOx} + I_{xOy}$$

$$I_{Oz} = \iiint_{Q} \mu(P)\,(x^2 + y^2)\, \mathrm{d}v = I_{yOz} + I_{zOx}$$

$$I_{xOy} = \iiint_{Q} \mu(P)\, z^2\, \mathrm{d}v\,.$$

Théorème de Huygens. Le moment d'inertie d'un solide par rapport à une droite D est égal à la somme de son moment d'inertie par rapport à la

parallèle D' à D issue de son centre d'inertie et de Md^2, où d est la distance de D' à D :

$$I_D = I_{D'} + Md^2 .$$

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un plan P est égal à la somme de son moment d'inertie par rapport au plan P' parallèle à P issu de son centre d'inertie et de Md^2, où d est la distance de P' à P :

$$I_P = I_{P'} + Md^2 .$$

Moments d'inertie classiques. Moment d'inertie d'un segment homogène de longueur $2a$ par rapport à son milieu :

$$I_0 = \frac{1}{3} Ma^2 .$$

Moment d'inertie d'un cercle homogène par rapport à son centre (resp. un diamètre) :

$$I_0 = MR^2 \qquad \left(\text{resp. } I_{0y} = \frac{1}{2} MR^2\right) .$$

Moment d'inertie d'un disque homogène par rapport à son centre (resp. un diamètre) :

$$I_0 = \frac{1}{2} MR^2 \qquad \left(\text{resp. } I_{0y} = \frac{1}{4} MR^2\right) .$$

Moment d'inertie d'une boule homogène par rapport à son centre (resp. un diamètre, resp. un plan diamétral) :

$$I_0 = \frac{3}{5} MR^2 \qquad \left(\text{resp. } I_{0z} = \frac{2}{5} MR^2, \text{ resp. } I_{x0y} = \frac{1}{5} MR^2\right) .$$

Moment d'inertie d'un tronc de cylindre de révolution homogène par rapport à son axe :

$$I_{0z} = \frac{1}{2} MR^2 .$$

INDEX TERMINOLOGIQUE

A

ABEL. lemme d'— (131).
ABSOLUE. accélération — (161). vitesse (161).
ABSOLUMENT CONVERGENTE. intégrale — (100). série — (127).
ACCÉLÉRATION (158).
ACCROISSEMENTS FINIS. formule des — (120). inégalité des — (116). théorème des — (90).
ADHÉRENCE (81).
ADJOINT d'un endomorphisme (60, 66).
ADJOINTE d'une matrice (64).
AFFINE. application — (68). champ de vecteurs — (77). espace — (68). groupe — (69). repère — (71). sous-espace — (69). variété — (69).
AIRE (178).
ALEMBERT. règle de D'— (127).
ALEMBERT-GAUSS. théorème de D'— (20).
ALGÈBRE (35).
ALTERNÉ. groupe — (4).
ALTERNÉE. application p-linéaire — (43). série — (127).
ANNEAU (4).
ANTÉORTHOGONAL (30).
ANTIAUTOADJOINT. endomorphisme — (61).
ANTISYMÉTRIQUE. application p-linéaire — (44). endomorphisme — (61).
APPLICATION (1).
ARC d'une nappe paramétrée (162).
ARGUMENT d'un nombre complexe (135).
ASSOCIATIVE. algèbre — (35).
ASTROÏDE (155).
ASYMPTOTIQUE (165).
AUTOADJOINT. endomorphisme — (61).
AUTOMORPHISME (2, 28, 69).
AXE d'un glisseur (78).
AXE instantané de rotation et de glissement (160).

B

BARYCENTRE (70).
BASE (31).
BASIQUE. partie — (32).
BERNOULLI. équation de — (139). lemniscate de — (156).
BERTRAND. intégrale de — (99). série de — (126).
BÉTA. fonction — (115).
BÉZOUT. égalité de — (14).
BIDUAL (31).
BINET. formules de — (159).
BINÔME. formule du — (5).
BOLZANO-WEIERSTRASS. propriété de — (82).
BORDANTE. matrice — (50).
BOREL-LEBESGUE. propriété de — (82).

C

CARACTÉRISTIQUE d'un anneau (7).
CARACTÉRISTIQUE. polynôme — (55). sous-espace — (54).
CARDIOÏDE (155).
CARRÉE. matrice — (36).
CARTÉSIENNE. forme — (7).
CAUCHY. critère de — (84, 125, 128). règle de — (126). suite de — (82).
CAUCHY-LIPSCHITZ. théorème de—(137).
CAUCHY-SCHWARZ. inégalité de — (59, 65).
CENTRE (81).
CHAMP de vecteurs (77).
CINÉMATIQUE. torseur — (160).
CIRCULAIRE. hélice — (157). mouvement — (158).
CIRCULAIRES. fonctions — (106).
CIRCULATION (174).
CISSOÏDE (153).
CLAIRAUT. équation de — (140).
CLOS. (algébriquement — (19).
CODIMENSION (33).
COFACTEUR (48).
COLONNE (36).
COMMUTATIF. anneau — (5).
COMMUTATIVE. algèbre — (36).
COMOMENT de deux torseurs (78).
COMPACT. espace — (82).
COMPLÉMENTAIRE. accélération — (161). matrice — (48).
COMPLET. espace métrique (82).
COMPLEXE. nombre — (7).
COMPOSANT (32).
COMPOSÉ de deux polynômes (12).
CÔNE (75).
CONJUGUÉS. nombres complexes — (8). polynômes — (20).
CONOÏDE (76).

CONTINUE. application — (84).
CONTINÛMENT DIFFÉRENTIABLE. application — (118).
CONVERGENCE. disque de — (131). rayon de — (131).
CONVERGENTE. — intégrale — (98). série — (124). suite — (82).
CONVEXE. fonction — (93). partie — (70).
COORDONNÉE (71). courbe — (162). forme linéaire — (33).
CORIOLIS. accélération de — (161).
CORPS (7).
COUPLE (78).
COURBURE (151). centre de — (152). ligne de — (165). rayon de — (151).
CRAMER. formule de — (51). système de — (51).
CURVILIGNE. abscisse — (150).
CYCLIQUE. groupe (3).
CYCLOÏDE (154).
CYLINDRE (75).

D

DARBOUX-RIBAUCOUR. trièdre de — (163).
DÉCIMAL. logarithme — (101).
DÉGÉNÉRÉE. forme bilinéaire symétrique (57).
DEGRÉ (11, 17).
DÉRIVABLE. fonction — (87).
DÉRIVATION (16).
DÉRIVÉ. polynôme — (16).
DÉRIVÉE (16, 87).
DESCARTES. folium de — (154).
DÉTERMINANT d'un endomorphisme (45). — d'une matrice carrée (46). — de n vecteurs (44).
DÉVELOPPABLE. fonction — en série entière (133).
DÉVELOPPÉE (153).
DIAGONALE. matrice — (42).
DIAGONALISABLE. endomorphisme — (54).
DIFFÉRENTIABLE. application — (118).
DIFFÉRENTIELLE (118). équation — (137). forme — (171).
DIMENSION (32).
DIRECT. automorphisme — (50).
DIRECTE. somme — (29).
DIRICHLET. intégrales de — (116).
DISCRIMINANT d'une forme bilinéaire symétrique (57).
DISTANCE (80).
DISTINGUÉ. sous-groupe — (3).
DIVERGENCE (167).
DIVERGENTE intégrale — (98). série — (124).
DIVISEUR de zéro (6).
DIVISION suivant les puissances croissantes (13).
DOMINÉE. fonction — (91).
DROIT. conoïde — (76).
DROITE (69).
DUAL (30).
DUALE. base — (33).

E

ELÉMENTAIRE. torseur — (78).
ELIMINATION (24).
ENDOMORPHISME (2, 28, 69).
ENTIÈRE. partie — (22). série — (130).
ENTRAÎNEMENT. accélération d'— (161). vitesse d'— (161).
EQUIPROJECTIF (77).
EQUIVALENTES. distances — (85). fonctions — (91). matrices — (41). normes — (86).
ETOILÉE. partie — (70).
EUCLIDIEN. espace affine — (72). espace vectoriel — (59).
EUCLIDIENNE. distance — (72). division — (13). norme — (59).
EULER. équation différentielle d'— (144). relation d'— (122).
EULÉRIENNES. fonctions — (115).
EXACTE. forme différentielle — (173, 175).
EXPONENTIELLE (100, 134).
EXTÉRIEUR (81). produit — (44).
EXTÉRIEURE. différentiation — (175).
EXTRAITE. matrice — (50).

F

FERMÉE. boule — (81). forme différentielle — (173). partie — (81).
FINI. support — (28).
FINIE. dimension — (32).
FIXE. théorème du point — (85).
FLUX (176).

FRENET. formules de — (151). trièdre de — (151).
FRONTIÈRE (81).

G

GAMMA. fonction — (115).
GAUSS. propriété de — (14).
GÉNÉRATEUR (4, 13).
GÉNÉRATRICE. famille — (31). partie — (28).
GÉODÉSIQUE (166). courbure — (163). torsion — (163).
GÉOMÉTRIQUE. arc — (145). nappe — (161). série — (125).
GIBBS. formule de — (62).
GLISSEUR (78).
GRADIENT (167).
GRASSMANN. relation de — (33).
GREEN-RIEMAN. formule de — (176).
GROUPE (2).
GULDIN. théorèmes de — (180).

H

HARMONIQUE. série — (126).
HEINE. théorème de — (84).
HÉLICE (157).
HÉLICOÏDAL. mouvement — (159).
HERMITIEN. espace vectoriel — (66). produit scalaire — (66).
HERMITIENNE. forme — (63). forme sesquilinéaire — (63). matrice carrée — (64). norme — (66).
HOMOGÈNE. équation différentielle — (138). fonction positivement — (122).
HUYGENS. théorème de — (180).
HYPERBOLIQUES. fonctions — (102).
HYPERPLAN (69).

I

IDÉAL (5).
IMAGE d'un morphisme (3, 6). — d'une application linéaire (29).
IMAGINAIRE. partie — (8).
IMPLICITE. fonction — (122).
INERTIE. centre d'— (180). moment d'— (180). théorème d'— (59).
INFLEXION (147).
INTÉGRABLE, fonction — (94).
INTÉGRALE (95, 168, 170). — d'une forme différentielle (174, 175).
INTÈGRE. anneau — (6).
INTÉRIEUR (81).
IRRÉDUCTIBLE. polynôme — (14).
ISOMÉTRIE (85).
ISOMORPHISME (2, 27, 69).
ISOTROPE. vecteur — (56).

J

JACOBI. identité de — (63).
JACOBIEN (119).
JACOBIENNE. matrice — (119).

L

LAGRANGE. équation de — (140). identité de — (62).
LAPLACIEN (168).
LEIBNIZ. formule de — (89).
LIBRE. famille — (31). partie — (32).
LIGNE (36).
LIMITE d'une application (84). — d'une suite (82).
LIMITÉ. développement — (92).
LINÉAIRE. application — (27). combinaison — (28). forme — (30). groupe — (28).
LIPSCHITZ. rapport de — (85).
LIPSCHITZIENNE. application — (85).
LOCAL. — maximum, minimum — (90).
LOGARITHME (101).
LOGARITHMIQUE. dérivée — (89). spirale — (156).
LOI de composition (2).

M

MACLAURIN. formule de — (17). série de — (132).
MASSE (179).
MATRICE (36).
MAXIMUM (89).
MÉRIDIEN. plan — (76).
MÉRIDIENNE (76).
MÉTRIQUE. espace — (81). sous-espace — (81).
MINEUR. déterminant — (48).
MINIMAL. polynôme — (54).
MINIMUM (90).
MIXTE. produit — (62).
MODULE d'un nombre complexe (8).
MOIVRE. formule de — (9, 104, 108).
MOMENT d'un torseur par rapport à un axe (79).
MONOGÈNE. groupe — (3).

MORPHISME (2, 5, 27).
MOUVEMENT d'un point (158). — d'un solide (159).
MOYENNE. courbure — (165). valeur — (97).
MULTILINÉAIRE. application — (43). forme — (43).
MULTIPLE. racine — (18).
MULTIPLICITÉ d'un pôle (22). — d'une racine (18).

N

NÉGLIGEABLE. fonction — (91).
NEPER. nombre de — (101).
NÉPÉRIEN. logarithme — (101).
NORMAL. plan — (146).
NORMALE (146, 163). — courbure (163).
NORME (82).
NORMÉ. espace vectoriel — (83).
NOYAU d'un morphisme (3, 6). — d'une application linéaire (29). — d'une forme bilinéaire symétrique (57).

O

OMBILIC (165).
ORDRE d'un élément (4). — d'un groupe (2).
ORIENTATION d'un espace affine (71). — d'un espace vectoriel (50).
ORIENTÉ. arc géométrique — (145). espace affine — (71). espace vectoriel — (50).
ORTHOGONAL (30, 57). automorphisme — (57). groupe — (57).
ORTHOGONALE. matrice — (58).
ORTHOGONAUX. vecteurs — (56).
ORTHONORMAL. repère — (73).
ORTHONORMALE. famille — (57).
OSCULATEUR. plan — (146).
OSTROGRADSKI. formule d'— (177).
OUVERTE. boule — (81). partie — (81).

P

PARALLÉLISME (69).
PARAMÉTRÉ. arc — (145).
PARAMÉTRÉE. nappe — (161).
PARTIELLE. application — (117). dérivée — (117).
PAS d'une subdivision (94). — instantané (160).
PASSAGE. matrice de — (40).
PERMUTATION (4).
PLAN (69).
PLEINE. sous-algèbre — (36).
PLÜCKER. conoïde de — (76).
POLAIRE. forme — d'une forme quadratique (56). — d'une forme hermitienne (63).
PÔLE (22).
POLYNÔME (11, 12).
POLYNOMIALE. fonction — (12).
POSITIVE. forme hermitienne — (65). forme quadratique — (59).
PRÉCOMPACT. espace — (82).
PREMIERS entre eux. polynômes — (13).
PRÉPONDÉRANTE. fonction — (91).
PRIMITIVE (90).
PRINCIPAL. anneau — (6). idéal — (6).
PRINCIPALE. courbure — (165). diagonale — (37). direction — (165). matrice — (50). partie — (22).
PRODUIT. espace vectoriel — (27).
PROJECTEUR (29).
PROPRE. sous-espace — (54). valeur — (54).
PUISSANCE. fonction — (101).
PYTHAGORE. théorème de — (60).

Q

QUADRATIQUE. forme — (56).
QUADRATIQUES. formes. — fondamentales (164).
QUARRABLE. partie — (169).
QUOTIENT (13). anneau — (6). espace vectoriel — (29). groupe — (3). loi — (2).

R

RAABE-DUHAMEL. règle de — (127).
RACINE d'un polynôme (18).
RACINES n-ièmes de l'unité (9).
RANG d'une application linéaire (34). — d'une forme bilinéaire symétrique (58). — d'une matrice (41). — d'une partie (34).
RATIONNELLE. fonction — (18). fraction — (17).
RAYON (81).
REBROUSSEMENT (147).
RÉCIPROQUE. polynôme — (26).
RECTIFIABLE. arc — (150).

RÉEL. nombre — (80).
RÉELLE. partie — (8).
RÉGULIER. point — (145, 161).
RÉSIDU (22).
RESTE (13).
RÉSULTANT (25).
RÉTROGRADE. automorphisme — (50).
RÉVOLUTION. surface de — (76).
RICCATI. équation de — (140).
RIEMANN. intégrale de — (99). règle de — (99, 126). série de — (126). somme de — (94).
ROLLE. théorème de — (90).
ROTATION (58). matrice de — (58).
ROTATIONNEL (167).

S

SCALAIRE. invariant (78). — potentiel (173). produit — (59).
SCHMIDT. procédé d'orthonormalisation de — (60).
SCHWARZ. théorème de — (118).
SCINDÉ. endomorphisme — (54). polynôme — (18).
SEGMENT (70).
SEMBLABLES. fonction — (91). matrices — (41).
SEMI-CONVERGENTE. intégrale — (100). série — (127).
SEMI-LINÉAIRE. application — (63).
SEMI-NORME (83).
SÉRIE (124).
SESQUILINÉAIRE. forme — (63).
SIGNATURE (4).
SIMPLE. convergence — (128). racine — (18).
SOMME d'une famille de sous-espaces vectoriels (28).
SOUS-ALGÈBRE (36).
SOUS-ANNEAU (5).
SOUS-CORPS (7).
SOUS-GROUPE (3).
SPECTRAL. sous-espace — (54).
SPHÈRE (81).
STOKES. formule de — (176).
STROPHOÏDE (153).
SUBDIVISION (94).
SUBSTITUABLE (17).
SUPPLÉMENTAIRES. sous-espaces vectoriels — (29).
SUPPORT d'un arc paramétré (145).
SYLVESTER. théorème d'inertie de — (59).
SYMÉTRIQUE. endomorphisme — (61). groupe — (4). polynôme — (24).

T

TANGENT. plan — (161).
TANGENTE (145). application linéaire — (118).
TANGENTS. mouvements — (160).
TAYLOR. formule de — (16).
TAYLOR-LAGRANGE. formule de — (120). inégalité de — (116). théorème de — (90).
TAYLOR-YOUNG. formule de — (93).
TEMPS (158).
TORSEUR (77).
TORSION. rayon de — (151).
TOTALE. courbure — (165).
TRACTRICE (155).
TRAJECTOIRE (158).
TRANSFORMÉ d'un polynôme (25).
TRANSPOSÉE d'une application linéaire (31). — d'une matrice (39).
TRANSPOSITION (4).
TRIANGULAIRE. inégalité — (9, 59, 80, 82). matrice — (42).
TRIGONALE. matrice — (42).
TRIGONALISABLE. endomorphisme — (54).

U

UNIFÈRE. algèbre — (35).
UNIFORME. convergence — (128).
UNIFORMÉMENT CONTINUE. application — (84).
UNITAIRE. algèbre — (35). automorphisme — (64). groupe — (64). matrice — (65). sous-algèbre — (36).

V

VALUATION (11, 15, 18).
VANDERMONDE. déterminant de — (49).
VECTEUR d'un torseur (77). — instantané de rotation — (160).
VECTORIEL. espace — (27). produit — (62). sous-espace — (28).
VITESSE (158).
VOISINAGE (81).
VOLUME (178).

W

WALLIS. intégrale de — (115).

Imprimé en France. — Imprimerie JOUVE, 17, rue du Louvre, 75001 PARIS
Dépôt légal : 4e trimestre 1981

L. Chambadal

Formulaire de mathématiques

Ce formulaire présente avec clarté et rigueur, en moins de 200 pages, la totalité des définitions, résultats et formules correspondant au programme de mathématiques des classes préparatoires aux Grandes Ecoles scientifiques.

Aussi constitue-t-il également pour l'étudiant d'Université, dès la première année, comme pour les enseignants et les ingénieurs, un instrument de travail commode et une référence sûre.

La terminologie et les notations utilisées sont conformes à l'usage actuel. Un index terminologique termine ce formulaire et en permet la consultation rapide.

ISBN 2-04-010152-7